Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička

Dipl.-Math. L. Diening

3.07.2000

Lineare Algebra II

SS 2000 — Blatt 9

Abgabe: **Montag, 10.7.2000** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Normalform der Matrix A und die zugehörige Basis.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei p ein beliebiges Polynom vom Grad m mit komplexen Koeffizienten.

(a) Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ähnliche Matrizen. Zeigen Sie, dass dann auch $p(A)$ und $p(B)$ ähnlich zueinander sind.

(b) Habe $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von $p(M)$ genau gegeben sind durch $p(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_k)$. (Die $p(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_k)$ müssen nicht paarweise verschieden sein!)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus, so dass $\mathrm{id}_V, f, f^2, f^3$ linear abhängig sind, aber id_V, f, f^2 nicht. Zeigen Sie, dass f einen Eigenwert besitzt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $V = \mathbb{R}^2$, dann ist die durch

$$\varphi((x_1, y_1)^T, (x_2, y_2)^T) := x_1 y_2 - y_1 x_2$$

gegebene Abbildung $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ bilinear. Zeigen Sie, dass φ nicht ausgeartet ist (d.h. gilt $\varphi(x, y) = 0$ für alle $y \in V$, so ist $x = 0$), dass aber für alle $v \in V$ gilt $\varphi(v, v) = 0$.