Lineare Algebra II

Kurzskript

Sommersemester 2000

Prof. Dr. Michael Růžička

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 8

Determinanten

Sei K ein Körper und $K^{n\times n}$ der Vektorraum der $n\times n$-Matrizen über K. Ziel dieses Kapitels ist zu zeigen, dass es **genau eine** Abbildung

$$\det\colon K^{n\times n} \to K$$

gibt mit folgenden Eigenschaften.

i) Hält man alle Spalten bis auf die i-te fest, so ist det eine **lineare** Funktion der i-ten Spalte (Multilinearität).

ii) Sind zwei Spalten in A gleich, so ist $\det A = 0$ (Antisymmtrie).

iii) Für die Einheitsmatrix E gilt $\det E = 1$ (Normierung).

Solche Abbildungen tauchen auf bei der Berechnung von Flächeninhalten von Parallelogrammen und Volumen von Parallelotopen.

8.1 Inhalt von Parallelogrammen und Parallelotopen

Flächeninhalt von Parallelogrammen

Für $F = \{v_1, v_2\}, v_i \in \mathbb{R}^2$ definieren wir

$$\pi_F := \{r_1v_1 + r_2v_2 \,:\, 0 \leq r_i \leq 1, i = 1, 2\} \subset \mathbb{R}^2.$$

π_F ist das von v_1 und v_2 aufgespannte Parallelogramm. Sind v_1 und v_2 linear abhängig, so ist π_F ausgeartet zu einer Linie oder sogar einem Punkt. Der Flächeninhalt von $p+\pi_F \subset \mathbb{R}^2, p \in \mathbb{R}^2$ hängt nicht von p ab, sondern nur von v_1 und v_2 (Translationsinvarianz). Der Flächeninhalt ist also eine Abbildung

$$I\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (v_1, v_2) \mapsto I(v_1, v_2)$$

mit den Eigenschaften

a) $I(v_1, v_2) \geq 0$. $I(v_1, v_2) = 0$ genau dann, wenn v_1 und v_2 linear abhängig sind.

b) I ist **positiv homogen**, d.h.

$$I(rv_1, v_2) = rI(v_1, v_2) = I(v_1, rv_2) \quad \text{für alle } r \geq 0. \tag{8.1}$$

c)

$$I(v_1 + v_2, v_2) = I(v_1, v_2) = I(v_1, v_1 + v_2). \tag{8.2}$$

d) Für die Standardbasis $\{e_1, e_2\}$ von $\mathbb{R}^2$ gilt

$$I(e_1, e_2) = 1. \tag{8.3}$$

Orientierter Flächeninhalt von Parallelogrammen

Ist (v_1, v_2) eine geordnete Basis von $\mathbb{R}^2$, dann ist

(1) (v_1, v_2) positiv orientiert, wenn man v_1 **gegen den Uhrzeigersinn** drehen muss, um auf kürzestem Wege v_2 zu erreichen,

(2) (v_1, v_2) positiv orientiert, wenn man v_1 **mit dem Uhrzeigersinn** drehen muss, um auf kürzestem Wege v_2 zu erreichen.

Wir definieren den **orientierten Flächeninhalt** von $p + \pi_F$ durch

$$J(v_1, v_2) := \begin{cases} I(v_1, v_2) & \text{falls } (v_1, v_2) \text{ positiv orientiert ist,} \\ -I(v_1, v_2) & \text{falls } (v_1, v_2) \text{ negativ orientiert ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Abbildung $J\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hat die Eigenschaften

a) J ist **bilinear**, d.h.

$$\begin{aligned} J(rv_1, v_2) &= rJ(v_1, v_2) = J(v_1, rv_2) \quad \text{für alle } r \in \mathbb{R}, \\ J(v_1, v_2 + v_3) &= J(v_1, v_2) + J(v_1, v_3) \\ J(v_1 + v_2, v_3) &= J(v_1, v_3) + J(v_2, v_3) \quad \text{für alle } v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

b) J ist **alternierend**, d.h.

$$J(v, v) = 0 \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^2.$$

c) J ist normiert, d.h. für die Standardbasis $\{e_1, e_2\}$ von $\mathbb{R}^2$ gilt

$$J(e_1, e_2) = 1.$$

Die explizite Formel für J ist

$$J(a_{11}e_1 + a_{21}e_2, a_{12}e_1 + a_{22}e_2) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Volumen von Parallelotopen

Analog zum zweidimensionalen Fall definieren wir für ein (geordnetes) Tripel von Vektoren $F = (v_1, v_2, v_3) \subset \mathbb{R}^3$ das von v_1, v_2, v_3 aufgespannte Parallelotop

$$\pi_F = \{r_1v_1 + r_2v_2 + r_3v_3 \,:\, 0 \leq r_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}.$$

Das Volumen von $p + \pi_F, p \in \mathbb{R}^3$ hängt nicht von p ab, ist also eine Abbildung

$$I \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (v_1, v_2, v_3) \mapsto I(v_1, v_2, v_3)$$

mit den Eigenschaften:

a) Für alle $r \geq 0$ gilt:

$$I(rv_1, v_2, v_3) = I(v_1, rv_2, v_3) = I(v_1, v_2, rv_3) = rI(v_1, v_2, v_3). \qquad (8.1')$$

b) I ändert sich nicht, wenn man einen der drei Vektoren zu einem anderen addiert, z.B.

$$I(v_1, v_2, v_3) = I(v_1 + v_3, v_2, v_3) = I(v_1, v_2 + v_3, v_3). \qquad (8.2')$$

c) I ist normiert, d.h. für die Standardbasis e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{R}^3$ gilt

$$I(e_1, e_2, e_3) = 1. \tag{8.3'}$$

Analog zum zweidimensionalen Fall können wir mit Hilfe der „rechten–Hand–Regel“ eine Orientierung für eine geordnete Basis (v_1, v_2, v_3) von $\mathbb{R}^3$ einführen. Wir definieren dann

$$J(v_1, v_2, v_3) := \begin{cases} I(v_1, v_2, v_3) & \text{falls } (v_1, v_2, v_3) \text{ positiv orientiert ist,} \\ -I(v_1, v_2, v_3) & \text{falls } (v_1, v_2) \text{ negativ orientiert ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$J\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ hat die Eigenschaften

(i) J ist **trilinear**, d.h. für alle $r \in \mathbb{R}$ und $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$J(rv_1, v_2, v_3) = J(v_1, rv_2, v_3) = J(v_1, v_2, rv_3) = rJ(v_1, v_2, v_3),$$

$$\begin{aligned} J(v_1 + v_2, v_3, v_4) &= J(v_1, v_3, v_4) + J(v_2, v_3, v_4), \\ J(v_1, v_2 + v_3, v_4) &= J(v_1, v_2, v_4) + J(v_1, v_3, v_4), \\ J(v_1, v_2, v_3 + v_4) &= J(v_1, v_2, v_3) + J(v_1, v_2, v_4). \end{aligned}$$

(ii) J ist **alternierend**, d.h. sind zwei Einträge gleich, so gilt $J = 0$.

(iii) J ist **normiert**, d.h. $J(e_1, e_2, e_3) = 1$.

8.2 Alternierende Formen

Definition 8.4. *Sei V ein K-Vektorraum. Eine Abbildung $f\colon V^n \to K$ heißt* **alternierende n-Form** *auf V, wenn gilt*

(1) f ist multilinear, d.h. für $i = 1, \dots, n$ und Vektoren $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ ist die Abbildung

$$v \mapsto f(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

linear.

(2) f ist **alternierend**, *d.h. ist $v_i = v_j$ für ein $i \neq j$, so ist*

$$f(v_1, \ldots, v_n) = 0.$$

Die Menge aller alternierenden n-Formen auf V bezeichnen wir mit $\mathrm{Alt}^n(V)$. Eine 1-Form auf V heißt auch **Linearform**. Eine Abbildung $f : V^n \to K$ heißt antisymmetrisch, wenn für alle $1 \leq i < j \leq n$ gilt

$$f(v_1, \ldots, v_n) = -f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n).$$

Satz 8.5. *Jede alternierende n-Form ist antisymmetrisch.*

Satz 8.6. *Sei f eine alternierende n-Form auf V und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, $r \in K$. Dann gilt*

$$f(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j + rv_i, v_{j+1}, \ldots, v_n) = f(v_1, \ldots, v_n).$$

Satz 8.7. *Ist $v_1, \ldots, v_n$ ein linear abhängiges System, so ist $f(v_1, \ldots, v_n) = 0$.*

Lemma 8.8. *Sei $B := \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Dann gibt es zu jedem System $S = (w_1, \ldots, w_n) \in V^n$ ein $\Delta(M_S) \in K$, so dass für alle $f \in \mathrm{Alt}^n(V)$ gilt*

$$f(w_1, \ldots, w_n) = \Delta(M_S) f(v_1, \ldots, v_n). \tag{8.9}$$

Hierbei ist M_S die Darstellungsmatrix von f bzgl. S.

Satz 8.10. *Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Dann gilt für alle $f, g \in \mathrm{Alt}^n(V)$*

$$f = g \quad \text{genau dann, wenn} \quad f(v_1, \ldots, v_n) = g(v_1, \ldots, v_n).$$

Folgerung 8.11. *Sei $\dim V = n$ und f_0 eine nicht–triviale alternierende n-Form auf V. Dann gibt es zu jeder alternierenden n-Form f auf V ein $r \in K$ mit $f = rf_0$, also gilt*

$$\dim(\mathrm{Alt}^n(V)) \leq 1.$$

8.3 Die Determinante einer Matrix

Wir identifizieren $(K^n)^n$ mit $K^{n \times n}$. Eine n-Form auf K^n ist dann eine Abbildung $K^{n \times n} \to K$.

Definition 8.12. *Unter der Determinante auf* $K^{n\times n}$ *verstehen wir diejenige alternierende* n*-Form auf* K^n, *die auf der Einheitsmatrix den Wert 1 annimmt. Für* $A \in K^{n\times n}$ *heißt* $\det A$ *die* **Determinante** *von* A.

Satz 8.13. *Seien* $A, B \in K^{n\times n}$.

(1) Geht B *aus* A *durch Multiplikation einer Spalte mit* $r \in K$ *hervor, so gilt*

$$\det B = r \det A.$$

(2) Geht B *aus* A *durch Vertauschen zweier Spalten hervor, so gilt*

$$\det B = -\det A.$$

(3) geht B *aus* A *durch Addition des* r*-fachen einer Spalte zu einer anderen hervor, so gilt*

$$\det B = \det A.$$

Satz 8.14. *Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix*

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

ist das Produkt der Elemente auf der Hauptdiagonalen, also

$$\det B = b_{11} \cdot \dots \cdot b_{nn}.$$

Analoges gilt für untere Dreiecksmatrizen.

Satz 8.15. *Für alle* $A \in K^{n\times n}$ *gilt:*

$$\operatorname{rg} A = n \quad \textit{genau dann, wenn} \quad \det A \neq 0.$$

Satz 8.16 (Cramersche Regel). *Sei* $A \in K^{n\times n}, b \in K^n, \det A \neq 0$. *Dann gilt für die Lösung* $c \in K^n$ *des Gleichungssystems* $Ax = b$:

$$c_i = \frac{\det A_i(b)}{\det A},$$

hierbei geht $A_i(b)$ *aus* A *durch Ersetzen der* i*-ten Spalte durch* b *hervor.*

Satz 8.17. *Für $A \in K^{n\times n}$ sind äquivalent:*

(i) $\operatorname{rg} A = n$,

(ii) $\det A \neq 0$,

(iii) *A ist invertierbar,*

(iv) *$Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung,*

(v) *für alle $b \in K^n$ gibt es genau ein Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$,*

(vi) *Die Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n$ von A sind linear unabhängig.*

8.4 Eigenschaften der Determinante

Satz 8.18. *Für alle $A, B \in K^{n\times n}$ gilt* $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Folgerung 8.19. *Ist $A \in K^{n\times n}$ invertierbar, so gilt* $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Sei $GL_n(K)$ die Gruppe aller invertierbaren $n\times n$-Matrizen über K und $K^* = \{x \in K, x \neq 0\}$. Dann ist $\det\colon GL_n(K) \to K^*$ ein Gruppenhomomorphismus. Auch die Menge $SL_n(K)$ aller $n \times n$-Matrizen über K mit Determinante 1 bildet eine Gruppe nach dem Satz.

Satz 8.20. *Sei $B \in K^{m\times m}, C \in K^{n\times n}, M \in K^{m\times n}$. Dann gilt für die Blockmatrix*

$$A := \begin{pmatrix} B & M \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

die Gleichung $\det A = \det B \cdot \det C$.

Satz 8.21. *Seien $A, B \in K^{n\times n}$.*

(i) *Geht B aus A durch Multiplikation einer Zeile mit $r \in K$ hervor, so gilt*

$$\det B = r \det A.$$

(ii) *Geht B aus A durch Vertauschen zweier Zeilen hervor, so gilt*

$$\det B = -\det A.$$

(iii) geht B aus A durch Addition des r-fachen einer Zeile zu einer anderen hervor, so gilt

$$\det B = \det A.$$

(iv) Geht B aus A durch Vertauschen zweier Zeilen hervor, so gilt

$$\det B = -\det A.$$

Satz 8.22. *Für alle $A \in K^{n\times n}$ gilt* $\det(A^T) = \det A$.

Für 3×3-Matrizen $A = (a_{ij})$ gilt die Formel

$$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \tag{8.23}$$

Satz 8.24 (Entwicklung nach einer Spalte). *Für alle $A = (a_{jk}) \in K^{n\times n}$ und $k = 1, \ldots, n$ gilt:*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik},$$

wobei $A_{ik} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der k-ten Spalte hervorgeht.

Folgerung 8.25 (Entwicklung nach einer Zeile). *Für alle $A = (a_{jk}) \in K^{n\times n}$ und $i = 1, \ldots, n$ gilt:*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}.$$

Für jede Matrix $A \in K^{n\times n}$ sei $a^*_{ik} = (-1)^{i+k} \det A_{ki}$. Die Matrix

$$\operatorname{adj} A = (a^*_{ik})_{i,k=1,\ldots,n}$$

heißt die zu A **adjunkte Matrix**.

Satz 8.26. *Ist $A \in K^{n\times n}$ invertierbar, so gilt*

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \operatorname{adj} A.$$

8.5 Existenz der Determinante

Satz 8.27. *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *existiert die Determinante* $\det\colon K^{n\times n} \to K$.

Bemerkung: Hieraus folgt insbesondere

$$\dim(\mathrm{Alt}^n(K^n)) = 1.$$

8.6 Orientierung und Volumen

Definition 8.28. [1] *Sei V ein Vektorraum. Zwei Basen F und G heißen* **gleichorientiert**, *falls die Determinante der Basiswechselmatrix P_G^F positiv ist. In diesem Fall schreiben wir $F \sim G$.*

Bemerkung: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Basen von V. Es gibt genau zwei Äquivalenzklassen, wählen wir eine Basis B von V so sind es

$$g = \{F \,:\, \det P_F^B > 0\} \quad \text{und} \quad h = \{F \,:\, \det P_F^B < 0\}.$$

g und h nennen wir **Orientierungen von** V. Ein Paar (V, l) bestehend aus einem Vektorraum V und einer Orientierung l von V nennen wir **orientierter Vektorraum**.
Ist V ein reeller Vektorraum der Dimension n und $F = \{v_1, \ldots, v_m\}$, $m \leq n$ ein System von Vektoren aus V. Das von $v_1, \ldots, v_m$ aufgespannte Parallelotop ist eine Menge $p + \pi_F$ mit $p \in V$ und

$$\pi_F := \{r_1 v_1 + \cdots + r_m v_m \,:\, 0 \leq r_i \leq 1, i = 1, \ldots, m\} \subset V.$$

Ist $V = \mathbb{R}^n$ und $m = n$ so nennen wir $\det(v_1, \ldots, v_n)$ das **orientierte Volumen** von $p + \pi_F$. In größerer Allgemeinheit gilt:

Satz 8.29. *Sei V ein orientierter euklidischer Vektorraum. Dann gibt es genau eine alternierende n-Form J auf V mit der Eigenschaft*

$$J(u_1, \ldots, u_n) = 1$$

für alle ON-Basen der gegebenen Orientierung. Ist $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine solche Basis, so gilt für $\{v_1, \ldots, v_n\}$

$$J(v_1, \ldots, v_n) = \det(k_B v_1, \ldots, k_B v_n),$$

[1] Achtung. In der Vorlesung wurde die Nummer 8.27 doppelt vergeben. Deshalb verschiebt sich die Nummerierung im Vergleich mit der Mitschrift um einen Z ähler.

wobei $k_B\colon V \to \mathbb{R}^n$ *der durch* $k_B(b_i) = e_i$ *gegebene Isomorphismus ist. Man nennt* J *auch eine* **Volumenform** *auf* V.

Ist $F = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ein System von Vektoren aus V und $p \in V$, so nennen wir

$$\operatorname{vol} p + \pi_F = J(v_1, \ldots, v_n)$$

das **orientierte Volumen** des Parallelotops $p + \pi_F$. Das **nicht–orientierte Volumen** von $p + \pi_F$ ist $|\operatorname{vol} p + \pi_F|$.
Wir berechnen nun das Volumen eines m-dimensionalen Parallelotops im n-dimensionalen Raum für $m < n$. Sei U der von F erzeugte m-dimensionale Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Wir nehmen an, dass U orientiert sei und wählen eine positiv orientierte Basis B aus U. Dann ist

$$\operatorname{vol}_m \pi_F = \det(k_B v_1, \ldots, k_B v_m)$$

das (orientierte) m-dimensionale Volumen von π_F.
Sei

$$G_F := \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \ldots & \langle v_1, v_m \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_m, v_1 \rangle & \ldots & \langle v_m, v_m \rangle \end{pmatrix}$$

die **Gramsche Matrix** von F. Es gilt dann

$$|\operatorname{vol} \pi_F| = \sqrt{\det G_F}.$$

Ergänzen wir eine positiv orientierte ON-Basis von $\{w_1, \ldots, w_m\}$ von U zu einer positiv orientierten ON-Basis $B = \{w_1, \ldots, w_m, w_{m+1}, \ldots, w_n\}$ von V, dann ist

$$\operatorname{vol}_m \pi_F = \det(k_B u_1, \ldots, k_B u_m, k_B w_{m+1}, \ldots, k_B w_n).$$

Ist speziell $m = n - 1$ und $\{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ eine positiv orientierte ON-Basis von U, dann existiert genau ein Vektor e, so dass $\{w_1, \ldots, w_{n-1}, e\}$ eine positiv orientierte ON-Basis von V ist. Der so konstruierte Vektor e heißt **positiv orientierter Einheitsnormalenvektor von** U.

Satz 8.30. *Es sei* U *ein* $(n-1)$*-dimensionaler Untervektorraum von* $\mathbb{R}^n$ *und* $F = \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ *eine Basis von* U. *Dann gibt es genau einen Vektor* $v_F \in \mathbb{R}^n$ *mit den Eigenschaften*

- $v_F \in U^\perp, v_F \neq 0,$
- $\det(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_F) = ||v_F||^2.$

Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

Definition 8.31. *Das* **Vektorprodukt** *zweier Vektoren* $v_1 = (a_1, a_2, a_3)^T$ *und* $v_2 = (b_1, b_2, b_3)^T$ *ist der Vektor*

$$v_1 \times v_2 = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)^T.$$

Es gelten folgende Formeln:

a) Ist $F = \{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^3$ ein linear unabhängiges System, so ist $v_1 \times v_2 = v_F$,

b) sind v_1, v_2 linear abhängig, so ist $v_1 \times v_2 = 0$,

c) $(u_1 + u_2) \times v = u_1 \times v + u_2 \times v$,

d) $u \times (v_1 + v_2) = u \times v_1 + u \times v_2$,

e) $(ru) \times v = r(u \times v) = u \times (rv)$,

f) $u \times v = -(v \times u)$,

d.h. $(u, v) \mapsto u \times v$ ist eine bilineare alternierende Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

8.7 Die Determinante eines Endomorphismus

Sei V ein Vektorraum der Dimension n und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus, d.h. eine lineare Abbildung. Sei $g \in \mathrm{Alt}^n(V), g \neq 0$. Wir betrachten die Abbildung

$$f \times g\ : V^n \to \mathbb{R}, (v_1, \ldots, v_n) \mapsto g(f(v_1), \ldots, f(v_n)).$$

Dann ist $f \times g \in \mathrm{Alt}^n(V)$ und wegen $\dim(\mathrm{Alt}^n(V)) = 1$ existiert ein $r \in \mathbb{R}$ mit $f \times g = rg$. Dabei hängt r nicht von der Wahl von g ab und heißt die **Determinante** $\det f$ **von** f.

Satz 8.32. *Die Determinante eines Endomorphismus* $f\colon V \to V$ *ist die Determinante der Matrix von* f *bzgl. irgendeiner Basis* B *von* V*:*

$$\det f = \det M_B^B(F).$$

Folgerung 8.33. *Für Endomorphismen eines Vektorraums* V *gilt stets*

a) $\det(\mathrm{id}) = 1$,

b) $\det(f \circ g) = (\det f) \cdot (\det g)$,

c) $\det f \neq 0$ *genau dann, wenn* f *ein Isomorphismus ist.*

8.8 Permutationen und explizite Determinantenformel

Ziel dieses Abschnitts ist die Definition der Determinante einer quadratischen Matrix mit Einträgen aus einem beliebigen kommutativen Ring.

Definition: Eine **Permutation** σ ist eine bijektive Abbildung der Menge $M_n = \{1, \ldots, n\}$ in sich. Die Menge der Permutationen nennt man S_n. Durch Verketten von Abbildungen wird S_n eine Gruppe. S_n heißt die **symmetrische Gruppe**.

Für $\sigma \in S_n$ schreibt man auch

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Für eine Permutation σ definieren wir

$$\varepsilon(\sigma) = \det(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) \in \{-1, 1\},$$

wobei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des K^n sei. $\varepsilon(\sigma)$ heißt das **Signum von** σ.

Satz 8.33. *Die Determinante einer $(n \times n)$-Matrix $A = (a_{ij})$ über einem Körper K ist gegeben durch*

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdot \cdots \cdot a_{\sigma(n),n}.$$

Besondere Elemente in S_n sind die **Transpositionen**

$$\tau_{ij} = \begin{cases} \tau_{ij}(i) & = j, \\ \tau_{ij}(j) & = i, \\ \tau_{ij}(k) & = k, \text{ für } k \neq i, j. \end{cases}$$

Satz 8.34. *Die symmetrische Gruppe hat $n!$ Elemente.*

Für jedes $\sigma \in S_n$ und jedes $a \in M_n$ sei $B_\sigma(a) = \{\sigma^i a, i \geq 0\}$. $B_\sigma(a)$ heißt die **Bahn von a unter σ**. Gilt $B_\sigma(a) = \{a\}$, so ist $\sigma(a) = a$ und wir nennen a ein **Fixelement** unter σ.

Lemma 8.35. *Besteht $B_\sigma(a)$ aus k Elementen, so gilt $\sigma^k(a) = a$ und*

$$B_\sigma(a) = \{a, \sigma(a), \dots, \sigma^k(a)\}.$$

Lemma 8.36. *Sei $\sigma \in S_n$. Dann gilt für alle $a, b \in M_n$*

$$B_\sigma(a) = B_\sigma(b) \quad \text{oder} \quad B_\sigma(a) \cap B_\sigma(b) = \emptyset.$$

Ein Element $\sigma \in S_n$ heißt **Zyklus**, wenn es genau eine nichttriviale Bahn (also eine Bahn bestehend aus mindestens zwei Elementen) unter σ gibt. Die Anzahl k der Elemente der nichttrivialen Bahn nennt man die **Ordnung** von σ. Ist $B_\sigma(a) = \{a, \sigma(a), \dots, \sigma^k(a)\}$, so schreiben wir auch $\sigma = (a, \sigma(a), \dots, \sigma^k(a))$.

Satz 8.37. *Jede von der Identität verschiedene Permutation lässt sich als Produkt von Zyklen darstellen, deren nichttriviale Bahnen disjunkt sind.*

Satz 8.38. *Für $n \geq 2$ lässt sich jede Permutation aus S_n darstellen als ein Produkt der speziellen Transpositionen $\tau_{12}, \tau_{23}, \dots, \tau_{n-1,n}$.*

Satz 8.39. *Die Abbildung $\varepsilon\colon S_n \to \{-1, 1\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus, d.h. es gilt für alle $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$*

$$\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2).$$

Sei nun R ein Ring und $(\{1_R, -1_R\}, \circ)$ die multiplikative Gruppe bestehend aus dem Einselement von R und dessen additiven Inversen.

Satz 8.40. *Für jedes $\sigma \in S_n$ sei $\alpha(\sigma)$ die Anzahl der verschiedenen Bahnen unter σ.*

(1) Die Abbildung $\varepsilon : S_n \to \{1_R, -1_R\}, \sigma \mapsto (-1_R)^{n-\alpha(\sigma)}$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(2) Ist R ein Körper, so stimmt diese Definition von ε mit der früheren überein.

Sei nun $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ eine Matrix mit Einträgen in R. Wir definieren

$$\det A := \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n),n}.$$

Die so definierte Abbildung $\det\colon R^{n\times n} \to R$ hat die Eigenschaften

a) $\det E_n = 1$, wobei $E_n = (\delta_{ij})$ die Einheitsmatrix ist,

b) det ist multilinear und alternierend.

Kapitel 9

Eigenwerte

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über dem Körper K und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Wir suchen eine Basis B von V, so dass

$$M_B(f) := M_B^B(f)$$

eine möglichst einfache Gestalt hat (**Normalformproblem**). Ziel dieses Kapitels ist zu zeigen, dass, wenn das charakteristische Polynom

$$\chi_f(X) := \det(XE_n - M_B(f))$$

(dieses ist unabhängig von der Wahl einer Basis B von V) in Linearfaktoren zerfällt, also die Form $(X - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_n)$ hat, es dann eine Basis B von V gibt mit der Eigenschaft, dass $M_B(f)$ in der **Jordanschen Normalform** gegeben ist, d.h.

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_n \end{pmatrix}$$

mit

$$M_i = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

9.1 Eigenräume

Sei V ein K-Vektorraum.

Definition 9.1. *Sei $f: V \to V$ eine lineare Abbildung.*

a) f heißt **diagonalisierbar**, *wenn es eine Basis B von V gibt, so dass*

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_i \in K.$$

b) Unter einem **Eigenvektor** *von f versteht man einen Vektor $v \neq 0$ zu dem es einen Skalar $\lambda \in K$ gibt mit*

$$f(v) = \lambda v.$$

Dieses λ heißt **Eigenwert** *von f.*

Bemerkungen:

- f ist diagonalisierbar genau dann, wenn es eine Basis von V gibt, die aus Eigenvektoren besteht. Auf der Diagonalen der zugehörigen Matrix stehen dann die entsprechenden Eigenwerte.
- Der Eigenwert zu einem Eigenvektor ist eindeutig bestimmt.
- Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 0$ sind genau die Elemente $v \in \mathrm{Ker}(f), v \neq 0$.

Satz 9.2. *Sei $f: V \to V$ ein Endomorphismus und $v_1, \ldots, v_k$ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten. Dann ist das System $\{v_1, \ldots, v_k\}$ linear unabhängig.*

Folgerung 9.3. *Ist n die Dimension von V und gibt es n* paarweise verschiedene *Eigenwerte von f, so ist f diagonalisierbar.*

Definition 9.4. *Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $f: V \to V$. Der* **Eigenraum** *von f zum Eigenwert λ ist*

$$E(\lambda) = \{v \in V, f(v) = \lambda v\}.$$

Bemerkungen:

- $E(\lambda)$ ist ein Untervektorraum von V.
- $m(\lambda) = \dim E(\lambda)$ heißt **geometrische Vielfachheit** von λ.

Folgerung 9.5. *Die Summe der Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten ist direkt.*

Satz 9.6. *Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus und $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von f. Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn für die geometrischen Vielfachheiten gilt*

$$\sum_{i=1}^{k} m(\lambda_i) = \dim V.$$

9.2 Das charakteristische Polynom

Definition 9.7. *Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum. Das* **charakteristische Polynom** *$\chi_f(X)$ eines Endomorphismus $f\colon V \to V$ ist*

$$\chi_f(X) := \det(XE_n - M_B(f)),$$

wobei E_n die Einheitsmatrix ist und $M_B(f)$ die Matrix von f bezüglich einer Basis B von V ist.

Bemerkung: Die Definition hängt nicht von der Wahl der Basis B ab.

Lemma 9.8. *Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus und* $\dim V = n$. *Dann hat das charakteristische Polynom von f den Grad n und ist von der Form*

$$\chi_f(X) = X^n - \mathrm{Sp}(f)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(f),$$

wobei $\mathrm{Sp}(f)$ *die Summe der Diagonaleinträge von $M_B(f)$ ist für eine Basis B von V.*

Bemerkung: Es gibt auch Formeln für die anderen Koeffizienten.

Matrizentechnische Variante: Zwei Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ heißen **ähnlich**, wenn es eine invertierbare Matrix $P \in G\ell_n(K)$ gibt mit der Eigenschaft $B = P^{-1}AP$. Wir schreiben dann $A \sim B$. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

Jede Matrix A ist Matrix der Abbildung $f_A\colon x \mapsto Ax$ bezüglich der Standardbasis. Die zu A ähnlichen Matrizen sind genau die Matrizen, die f_A bezüglich einer beliebigen anderen Basis von K^n darstellen.
Ein Element $\lambda \in K$ heißt **Eigenwert von** A, falls ein Vektor $x \neq 0$ existiert mit $Ax = \lambda x$. x heißt dann **Eigenvektor zum Eigenwert** λ. A heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine zu A ähnliche Diagonalmatrix gibt.
Das **charakteristische Polynom** $\chi_A(X)$ ist

$$\chi_A(X) = \det(XE - A) = X^n - \mathrm{Sp}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A).$$

Das charakteristische Polynom $\chi_A(X)$ hängt dabei nur von der Ähnlichkeitsklasse von A ab.

Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Die **algebraische Vielfachheit** $k(\lambda)$ eines Eigenwerts λ von f ist die Ordnung von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_f(X)$, d.h.

$$\chi_f(X) = (X - \lambda)^{k(\lambda)} g(x) \text{ mit } g(\lambda) \neq 0.$$

Satz 9.9. *Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus und λ ein Eigenwert von f. Dann ist λ eine mindestens $m(\lambda)$-fache Nullstelle von $\chi_f(X)$, mit anderen Worten also*

$$m(\lambda) \leq k(\lambda).$$

Satz 9.10. *Sei V ein Vektorraum der Dimension n. Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn gilt:*

(i) $\chi_f(X)$ *zerfällt vollständig in Linearfaktoren, d.h.*

$$\chi_f(X) = \prod_j (X - \lambda_j)^{k(\lambda)}.$$

(ii) $k(\lambda_j) = m(\lambda_j) = \dim E(\lambda_j)$ *für alle* j.

9.3 Verallgemeinerte Eigenräume

Sei V ein K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung und λ ein Eigenwert von f. Sei $f_\lambda := f - \lambda\,\mathrm{id}$. Wir definieren

$$F_r(\lambda) = \mathrm{Ker}(f_\lambda^r)$$

für jedes $r \geq 0$.

Lemma 9.11. *Die $F_r(\lambda)$ bilden eine aufsteigende Folge von f-invarianten Untervektorräumen von V, d.h es gilt für alle $r \geq 0$*

$$\begin{aligned} F_r(\lambda) &\subset F_{r+1}(\lambda), \\ f(F_r(\lambda)) &\subset F_r(\lambda). \end{aligned}$$

Lemma 9.12. *Gilt $F_{r+1}(\lambda) = F_r(\lambda)$ für ein $r \geq 0$, so folgt $F_{r+s}(\lambda) = F_r(\lambda)$ für alle $s \geq 0$.*

Definition 9.13. *Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus und λ ein Eigenwert von f.*

a) Die **Nilpotenzordnung** *$r(\lambda)$ von λ ist das kleinste r mit $F_r(\lambda) = F_{r+1}(\lambda)$.*

b) Der **verallgemeinerte Eigenraum** *von f zum Eigenwert λ ist*

$$F(\lambda) := F_{r(\lambda)}(\lambda) = \operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id})^{r(\lambda)}.$$

Bemerkung: Aus den Lemmata 9.11 und 9.12 folgt, dass $r(\lambda) \leq \dim F(\lambda)$ gilt.

Sei

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in K^{n \times n}.$$

A heißt **λ-Block der Ordnung** n. Für $f = f_A$ gilt

$$\chi_f(X) = (X - \lambda)^n,$$

d.h. λ ist Eigenwert von f der algebraischen Vielfachheit n. Die Nilpotenzordnung von λ ist $r(\lambda) = n$ und der Eigenraum $E(\lambda)$ hat die Dimension 1, d.h. die geometrische Vielfachheit von λ ist $m(\lambda) = 1$.
Sei f nun wieder ein beliebiger Endomorphismus des Vektorraums V. Wir definieren

$$G_r(\lambda) := \operatorname{Im}(f_\lambda^r).$$

Lemma 9.14. *Die $G_r(\lambda)$ bilden eine absteigende Folge von f-invarianten Untervektorräumen, d.h. es gilt*

$$\begin{aligned} G_{r+1}(\lambda) &\subset G_r(\lambda), \\ f(G_r(\lambda)) &\subset G_r(\lambda). \end{aligned}$$

Lemma 9.15. *Gilt $F_r(\lambda) = F_{r+1}(\lambda)$, so folgt*

$$F_r(\lambda) \cap G_r(\lambda) = \{0\}.$$

Satz 9.16. *Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus und $F(\lambda)$ der verallgemeinerte Eigenraum zum Eigenwert λ. Hat λ die Nilpotenzordnung $r(\lambda)$, so erhält man durch*

$$V = F(\lambda) \oplus G(\lambda),$$

wobei $G(\lambda) = \operatorname{Im}(f - \lambda \operatorname{id})^{r(\lambda)}$, eine Zerlegung von V in f-invariante Untervektorräume von V.

Satz 9.17. *Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit Eigenwert λ. Dann gibt es eine Basis B des verallgemeinerten Eigenraums $F(\lambda)$, bezüglich derer die Matrix der Restriktion von f auf $F(\lambda)$ von der Form*

$$M_B(f|_{F(\lambda)}) = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda \end{pmatrix}$$

ist.

Folgerung 9.18. *Das charakteristische Polynom von $f|_{F(\lambda)}$ ist gegeben durch*

$$\chi_{f|_{F(\lambda)}}(X) = (X - \lambda)^{k(\lambda)},$$

insbesondere

$$\dim F(\lambda) = k(\lambda) = \text{ algebraische Vielfachheit von } \lambda. \tag{9.19}$$

9.4 Zerlegungen

Satz 9.20. *Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ die verschiedenen Eigenwerte von f, so ist V die direkte Summe der dazugehörigen verallgemeinerten Eigenräume:*

$$V = F(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus F(\lambda_p).$$

Bemerkung: Über dem Körper $\mathbb{C}$ zerfällt nach dem Hauptsatz der Algebra jedes Polynom in seine Linearfaktoren. Die Voraussetzung ist für Endomorphismen komplexer Vektorräume also immer erfüllt.

Folgerung 9.21. *Die Voraussetzungen seien wie in Satz 9.20. Dann gibt es eine Basis von V, bezüglich derer die Matrix von f eine untere Dreiecksmatrix der Form*

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ * & & \lambda_1\end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix}\lambda_2 & & 0\\ & \ddots & \\ * & & \lambda_2\end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix}\lambda_p & & 0\\ & \ddots & \\ * & & \lambda_p\end{matrix}} \end{pmatrix}$$

ist.

Bemerkung: $f\colon V \to V$ heißt **trigonalisierbar**, wenn die Matrix von f bezüglich einer geeigneten Basis eine untere Dreiecksmatrix ist. Das ist genau dann der Fall, wenn das charakteristische Polynom von f vollständig in Linearfaktoren zerfällt.

Definition 9.22.

- *Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ heißt* **nilpotent**, *wenn für ein $r > 0$ $f^r = 0$ ist.*
- *Ist $\chi_f(X) = \prod_{j=1}^{p}(X - \lambda_j)^{k(\lambda_j)}$, so seien $f_D\colon V \to V$ und $f_N\colon V \to V$ definiert durch*

$$\begin{aligned} f_D(v) &:= \lambda_j v, \quad \text{für } v \in F(\lambda_j) \\ f_N(v) &:= f(v) - f_D(v). \end{aligned}$$

f_D und F_N heißen **diagonalisierbarer** *und* **nilpotenter Anteil** *von f.*

Satz 9.23. *Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt.*

a) f_D ist diagonalisierbar, f_N ist nilpotent und es gilt

$$f = f_D + f_N, \quad f_D \circ f_N = f_N \circ f_D.$$

b) Ist $g\colon V \to V$ ein diagonalisierbarer und $h\colon V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus und gilt

$$f = g + h, \quad g \circ h = h \circ g,$$

so folgt $g = f_D$ und $h = f_N$.

Bemerkung: Es existieren sogar Polynome $p(X)$ und $q(X)$ ohne konstanten Term mit $f_D = p(f)$ und $f_N = q(f)$. Diese Polynome hängen aber noch von f ab!

9.5 Nilpotente Endomorphismen

Satz 9.24. *Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus und $n = \dim V$. Dann gilt*

$$f \text{ ist nilpotent} \quad \Leftrightarrow \quad \chi_f(X) = X^n.$$

Sei $f\colon V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus und $v \in V, v \neq 0$. Das kleinste $k \geq 1$ mit $f^k(v) = 0$ heißt der **Index von v bezüglich f**.

Lemma 9.25. [1] *$f\colon V \to V$ sei nilpotent und $v \neq 0$ ein Vektor vom Index k. Dann ist das System*

$$S_v = \{v, f(v), \ldots, f^{k-1}(v)\}$$

linear unabhängig, $U_v = L(S_v)$ ist ein f-invarianter Untervektorraum und die Matrix der Restriktion von f auf U_v bezüglich der Basis S_v ist ein 0-Block der Ordnung k.

Man nennt U_v den **nilzyklischen Untervektorraum** mit **f-Generator** v.

[1] Da in der Vorlesung die Nummer 9.24 doppelt vergeben wurde, verschiebt sich ab hier die Nummerierung um einen Zähler!

Satz 9.26. *Sei $f\colon V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus.*

a) Dann gibt es Vektoren v_j, so dass die Systeme

$$S_j = \{v_j, f(v_j), \dots, f^{k_j-1}(v_j)\},$$

wobei k_j der Index von v_j bezüglich f ist, zusammen eine Basis

$$B = \bigcup_j S_j$$

von V bilden.

b) Es gibt eine **nilzyklische Zerlegung** *$V = \bigoplus U_j$ mit nilzyklischen Untervektorräumen U_j.*

c) Die Matrix von f bezüglich B ist eine diagonale Blockmatrix aus 0-Blöcken.

Solche Basen heißen **Jordan-Basen**.

Satz 9.27. *Sei $f\colon V \to V$ nilpotent. Ist B eine Jordan-Basis von V bezüglich f, so gilt für die Anzahl $x(k)$ der 0-Blöcke der Ordnung k in der Matrix von f bezüglich B:*

$$\dim(\operatorname{Ker} f^{r+1}) = \dim(\operatorname{Ker} f^r) + \sum_{k>r} x(k).$$

Bemerkung:

a) Damit sind die $x(k)$ eindeutig, d.h. unabhängig von der Wahl der Jordan-Basis B bestimmt.

b) Es gilt $\dim V = \sum_k kx(k)$.

c) Die Anzahl der 0-Blöcke ist die Dimension von $\operatorname{Ker}(f) = E(0)$.

d) Die größte Ordnung eines 0-Blocks ist die Nilpotenzordnung von f.

e) Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt **nilpotent**, wenn es ein $r > 0$ gibt mit $A^r = 0$.

Folgerung 9.28. *a) Zu jeder nilpotenten Matrix $A \in K^{n\times n}$ gibt es eine invertierbare Matrix $P \in G\ell_n(K)$, so dass $P^{-1}AP$ eine diagonale Blockmatrix aus 0-Blöcken ist.*

b) Zwei diagonale Blockmatrizen aus 0-Blöcken sind genau dann ähnlich, wenn sie bis auf die Reihenfolge der Blöcke übereinstimmen.

Damit haben wir das Normalformenproblem für nilpotente Matrizen gelöst.

9.6 Jordansche Normalform

Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Elemente aus $F(\lambda)$ heißen **verallgemeinerte Eigenvektoren** zum Eigenwert λ. Ist $v \in F(\lambda), v \neq 0$, so heißt das kleinste $k > 0$ mit $f_\lambda^k(v) = 0$ der **Index des verallgemeinerten Eigenvektors** v. Ein verallgemeinerter Eigenvektor vom Index 1 ist ein Eigenvektor von f. Ist $v \neq 0$ ein verallgemeinerter Eigenvektor zum Eigenwert λ mit Index k, so ist $f_\lambda^r(v)$ ein verallgemeinerter Eigenvektor zum Index $k - r$ für alle $0 \leq r < k$, insbesondere ist $f_\lambda^{k-1}(v)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Lemma 9.29. *Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus und $v \neq 0$ ein verallgemeinerter Eigenvektor zum Eigenwert λ vom Index k. Dann ist*

$$\begin{aligned} S_v &= \{v, f_\lambda(v), \ldots, f_\lambda^{k-1}(v)\} \text{ linear unabhängig} \\ U_v &= L(S_v) \text{ ein } f\text{-invarianter linearer Untervektorraum} \end{aligned}$$

und die Matrix der Restriktion von f auf U_v ist ein λ-Block der Ordnung k.

Satz 9.30. *Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit Eigenwert λ.*

a) Es gibt verallgemeinerte Eigenvektoren v_j vom Index k_j in $F(\lambda)$, so dass die Systeme
$$S_j = \{v_j, f_\lambda(v_j), \ldots, f_\lambda^{k_j-1}(v_j)\}$$
zusammmen eine Basis $B = \bigcup_j S_j$ von $F(\lambda)$ bilden.

b) Die Matrix von $f|_{F(\lambda)}$ bezüglich einer derartigen Basis ist eine diagonale Blockmatrix aus λ-Blöcken.

c) Ist $x(k)$ die Anzahl der λ-Blöcke der Ordnung k in einer derartigen Matrix, so gilt
$$\dim(\operatorname{Ker} f_\lambda^{r+1}) = \dim(\operatorname{Ker} f_\lambda^r) + \sum_{k>r} x(k).$$

Bemerkungen:

- Aus obigem Satz folgt

$$\dim E(\lambda) = \text{ Gesamtzahl der } \lambda\text{- Blöcke.} \tag{9.31}$$

- Die Nilpotenzordnung von λ ist

$$r(\lambda) = \text{ die maximale Ordnung eines } \lambda\text{-Blocks} \tag{9.32}$$

Satz 9.33 (Jordansche Normalform). *Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ die Eigenwerte von f. Dann gibt es eine Basis von V, bezüglich derer die Matrix von f in* **Jordanscher Normalform** *gegeben ist, d.h. als diagonale Blockmatrix aus λ_j-Blöcken. Ist dabei $x_j(k)$ die Anzahl der λ_j-Blöcke der Ordnung k, so gilt*

$$\dim \operatorname{Ker}((f - \lambda_j \operatorname{id})^{r+1}) = \dim \operatorname{Ker}((f - \lambda_j \operatorname{id})^r) + \sum_{k>r} x_j(k).$$

Damit ist das Normalformproblem für Matrizen $A \in K^{n \times n}$ gelöst. Jede solche Matrix ist **ähnlich zu einer diagonalen Blockmatrix aus λ-Blöcken**, die bis auf die Reihenfolge der Blöcke eindeutig bestimmt ist durch

a) die verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des charakteristischen Polynoms von A,

b) die algebraischen Vielfachheiten k_j der λ_j,

c) die Anzahl $x_j(k)$ der λ_j-Blöcke der Ordnung k.

Definition 9.34. *Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Das normierte Polynom kleinsten Grades $m_f(X)$, welches von f annulliert wird (d.h. $m_f(f) = 0$), heißt das* **Minimalpolynom** *von f.*

Satz 9.35. *Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ die verschiedenen Eigenwerte und ist r_j die maximale Ordnung eines λ_j-Blocks in der Jordanschen Normalform von f, so ist*

$$m_f(X) = \prod_{j=1}^{p} (X - \lambda_j)^{r_j}.$$

Satz 9.36 (Cayley–Hamilton). *Ist $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt, so gilt*

$$\chi_f(f) = 0.$$

Bemerkung: Diese Aussage gilt sogar für beliebige Endomorphismen.

9.7 Normalform im $\mathbb{R}^n$

Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Endomorphismus, so definieren wir die **komplexe Fortsetzung** $f_{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ durch

$$f_{\mathbb{C}}(v_1 + iw_1, \dots, v_n + iw_n) := f(v_1, \dots, v_n) + if(w_1, \dots, w_n).$$

$f_{\mathbb{C}}$ ist dann eine komplex lineare Abbildung komplexer Vektorräume und wir können folglich eine Basis von $\mathbb{C}^n$ wählen, bezüglich der die Matrix von $f_{\mathbb{C}}$ durch Jordansche Normalform gegeben ist. Es stellt sich heraus, dass wir aus dieser (komplexen!) Basis eine *reelle* Basis von $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ konstruieren können, bezüglich derer die Matrix von f eine einfache Form hat.
Sei $v = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Die komplexe Konjugation ist dann definiert als

$$\sigma(v) := (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Man nennt ein n-Tupel $v \in \mathbb{C}^n$ **reell**, wenn alle Komponenten von v reelle Zahlen sind, d.h. wenn $\sigma(v) = v$ gilt.

Satz 9.37. *Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ ein komplexer Untervektorraum mit der Eigenschaft $U \cap \sigma(U) = \{0\}$. Ist $B = \{v_1, \dots, v_k\}$ eine Basis von U, so ist*

$$B_{\mathbb{R}} = \{\mathrm{Im}(v_1), \mathrm{Re}(v_1), \dots, \mathrm{Im}(v_k), \mathrm{Re}(v_k)\}$$

eine Basis von $U \oplus \sigma(U)$ (über den komplexen Zahlen!).

Satz 9.38. *$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei ein Endomorphismus, μ eine nichtreelle Nullstelle von $\chi_f(X)$. Ist $v \in \mathbb{C}^n$ ein verallgemeinerter Eigenvektor vom Index k zum Eigenwert μ von $f_{\mathbb{C}}$, so ist $\sigma(v)$ ein verallgemeinerter Eigenvektor vom Index k zum Eigenwert $\bar{\mu}$.*

Folgerung 9.39. *$v \in \mathbb{C}^n$ ist ein Eigenvektor von $f_{\mathbb{C}}$ zum Eigenwert μ genau dann, wenn $\sigma(v)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\bar{\mu}$ ist.*

Ist nun $\mu = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein nichtreeller Eigenwert von $f_{\mathbb{C}}$,

$$J_\mu = \begin{pmatrix} \mu & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \mu \end{pmatrix}$$

ein μ-Block der Ordnung k in der Jordanschen Normalform von $f_{\mathbb{C}}$ und $v_1, \ldots, v_k$ die zugehörige Basis eines Unterraums U von $\mathbb{C}^n$, dann gibt es einen $\bar{\mu}$–Block der Ordnung k in der Jordanschen Normalform von $f_{\mathbb{C}}$ mit zugehöriger Basis $\sigma(v_1), \ldots, \sigma(v_k)$, und

$$\mathrm{Im}(v_1), \mathrm{Re}(v_1), \ldots, \mathrm{Im}(v_k), \mathrm{Re}(v_k)$$

ist eine (komplexe) Basis von $U \oplus \sigma(U)$ und eine reelle Basis des f-invarianten (reellen) Raums $(U \oplus \sigma(U)) \cap \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ und bezüglich dieser Basis ist die Matrix von f gegeben durch die **reelle Form des komplexen μ-Blocks**, nämlich durch die $2k \times 2k$–Matrix

$$\begin{pmatrix} D_{a,b} & & & 0 \\ I & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & I & D_{a,b} \end{pmatrix},$$

wobei

$$D_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also folgendes Ergebnis:
Sei V ein reeller Vektorraum.
Normalform eines Endomorphismus $f\colon V \to V$: Sei

$$\chi_f(X) = \prod_{j=1}^{p} (X - \lambda_j)^{k_j} \prod_{r=1}^{q} (X - \mu_r)^{l_r} (X - \bar{\mu})^{l_r}$$

die vollständige Zerlegung des charakteristischen Polynoms von f über $\mathbb{C}$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ und $\mu_r \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Basis von V bezüglich derer die Matrix von f aus reellen λ_i-Blöcken und reellen Formen komplexer μ_r-Blöcken besteht. Diese Normalform ist bis auf die Reihenfolge der Blöcke eindeutig.

Kapitel 10

Symmetrische Bilinearformen

Sei K ein Körper. In diesem Kapitel gilt die generelle Voraussetzung $2 \neq 0$ in K, also

$$\operatorname{Char} K \neq 2. \tag{10.1}$$

Eine **quadratische Form** ist eine Abbildung $q\colon K^n \to K$ der Form

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i \leq j} a_{ij} x_i x_j \quad \text{mit } a_{ij} \in K.$$

Für jedes $t \in K$ können wir die **Quadrik**

$$Q_t := \{x \in K^n; q(x) = t\}$$

betrachten.

- Für $K = \mathbb{C}$ kann man durch geeignete Basiswahl erreichen, dass jede quadratische Form von der Gestalt

  $$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_k^2$$

  für ein $k \leq n$ ist.

- Im Fall $K = \mathbb{R}$ lässt sich jede quadratische Form in einer geeigeneten Basis in der Gestalt

  $$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_{r+s}^2$$

  schreiben. Das Paar (r, s) heißt die **Signatur** von q. Sie ist unabhängig von der Wahl der Basis.

10.1 Definitionen und Matrizenkalkül

Definition 10.2. *Sei V ein Vektorraum über K. Eine* **symmetrische Bilinearform auf** V *ist eine bilineare Abbildung $\phi\colon V \times V \to K$, die symmetrisch ist, d.h. es gilt $\phi(x,y) = \phi(y,x)$ für alle $x, y \in V$. Die* **assoziierte quadratische Form** $q_\phi\colon V \to K$ *ist definiert durch $q_\phi(x) := \phi(x,x)$.*

Bemerkung: Die symmetrische Bilinearform lässt sich im Fall $\operatorname{Char} K \neq 2$ aus der assoziierten quadratischen Form zurückgewinnen.

Definition 10.3. *Sei $\phi\colon V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform. Die* **Matrix von** ϕ *bezüglich einer Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von V ist gegeben durch*

$$M_B(\phi) = (\phi(v_i, v_j)) \in K^{n\times n}.$$

Bemerkungen:

- $M_B(\phi)$ ist immer symmetrisch.
- Für $x, y \in V$ gilt
$$\phi(x,y) = k_B^T(x) M_B(\phi) k_B(y). \tag{10.4}$$

Satz 10.5. *Ist B' eine andere Basis von V. Ist $P = P_B^{B'}$ die Basiswechselmatrix, so ist*

$$M_{B'}(\phi) = P^T \cdot M_B(\phi) \cdot P.$$

Definition 10.6. *Sei $\phi\colon V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform. Der* **Rang von** ϕ *ist gegeben durch*

$$\operatorname{Rang} \phi = \operatorname{Rang} M_B(\phi)$$

für eine Basis B von V. Diese Definition hängt nicht von der Wahl der Basis B ab.

- Ist $M_B(\phi)$ eine Diagonalmatrix, so ist der Rang von ϕ die Anzahl der Einträge $\neq 0$.
- Die Determinante einer Matrix von ϕ ist **nicht** unabhängig von der Wahl der Basis.

10.2 Diagonalisierung und orthogonale Komplemente

Satz 10.7. *Ist* $\operatorname{Char} K \neq 2$*, so lässt sich jede symmetrische Matrix* $A \in K^{n\times n}$ *durch Zeilen– und Spaltenumformungen auf Diagonalgestalt bringen.*

Folgerung 10.8. *Ist* $\operatorname{Char}(K) \neq 2$*, so gibt es zu jeder symmetrischen Matrix* $A \in K^{n\times n}$ *eine invertierbare Matrix* $P \in G\ell_n(K)$*, so dass* $P^T AP$ *eine Diagonalmatrix ist.*

Folgerung 10.9. *Gilt* $\operatorname{Char}(K) \neq 2$*, so gibt es zu jeder symmetrischen Bilinearform* $\phi\colon V \times V \to K$ *eine Basis von* V*, bezüglich derer die Matrix von* ϕ *diagonal ist.*

Definition 10.10. *Sei* $\phi\colon V \times V \to K$ *eine symmetrische Bilinearform und* U *ein Untervektorraum von* V*. Das* **orthogonale Komplement von** U *bezüglich* ϕ *ist gegeben durch*

$$U^\perp := \{y \in V; \phi(x,y) = 0 \quad \forall x \in U\}.$$

- $U^\perp$ ist ein Untervektorraum von V.
- $\{0\}^\perp = V$. Sind $U_1 \subset U_2$ Untervektorräume, so gilt $U_2^\perp \subset U_1^\perp$.
- Im Allgemeinen gilt **nicht** $V = U \oplus U^\perp$.

Lemma 10.11. *Für eine symmetrische Bilinearform* $\phi\colon V \times V \to K$ *gilt*

$$\dim V^\perp = \dim V - \operatorname{Rang} \phi.$$

Definition 10.12. *Eine symmetrische Bilinearform* ϕ *auf* V *heißt* **nicht-entartet***, wenn gilt*

$$\phi(x,y) = 0 \quad \forall x \in V \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

Bemerkung: Äquivalent hierzu ist

- Für jedes $y \neq 0$ gibt es ein $x \in V$ mit $\phi(x,y) \neq 0$.
- $V^\perp = \{0\}$.
- $\operatorname{Rang} \phi = \dim V$.

Satz 10.13. *Sei $\phi\colon V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform. Für einen Untervektorraum U von V gilt*

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V + \dim(U \cap V^\perp).$$

Folgerung 10.14. *Sei $\phi\colon V \times v \to K$ eine symmetrische Bilinearform. Ist ϕ nicht entartet, so gilt für einen Untervektorraum U von V*

(i) $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$*,*

(ii) $U^{\perp\perp} = U$*.*

Achtung: Auch wenn ϕ nichtenartet ist, gilt im Allgemeinen **nicht**

$$U \oplus U^\perp = V.$$

Beispiel: Ein zweidimensionaler Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform ϕ, die bezüglich einer Basis $B = \{v_1, v_2\}$ gegeben ist durch

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

heißt **hyperbolische Ebene**. ϕ ist nicht entartet, aber für den von v_1 aufgespannten Unterraum U gilt $U = U^\perp$.
Bemerkung: Für jede symmetrische Bilinearform $\phi\colon V \to V$ und einen Untervektorraum U von V folgt aus $U \cap U^\perp = \{0\}$ schon $V = U \oplus U^\perp$.

Lemma 10.15. *$\phi\colon V \times V \to K$ sei eine symmetrische Bilinearform. Für einen Untervektorraum U von V gilt genau dann $U \cap U^\perp = \{0\}$, wenn die Restriktion*

$$\phi_U\colon U \times U \to K$$

nicht ausgeartet ist.

Man nennt U dann einen **nicht entarteten Untervektorraum** bezüglich ϕ.

Satz 10.16. *Sei $\phi\colon V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform und U ein Untervektorraum von V.*

(i) U ist genau dann nicht entartet, wenn $U \oplus U^\perp = V$ gilt.

(ii) Ist ϕ nicht entartet, so ist U genau dann nicht entartet, wenn $U^\perp$ nicht-entartet ist.

Bezeichnung: Ein **Orthogonalsystem** bezüglich einer symmetrischen Bilinearform $\phi\colon V \times V \to K$ ist ein System $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$ mit

$$\phi(v_i, v_j) = 0, \quad \text{falls } i \neq j.$$

Gilt zusätzlich $\phi(v_i, v_i) \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, r$, so ist S linear unabhängig. Eine **Orthogonalbasis** ist eine Basis von V, die ein Orthogonalsystem ist.

Satz 10.17. *$\phi\colon V \times V \to K$ sei eine symmetrische Bilinearform. Gilt*

$$\mathrm{Char}(K) \neq 2,$$

so lässt sich jedes Orthogonalsystem aus Vektoren v mit $\phi(v, v) \neq 0$ zu einer Orthogonalbasis von V ergänzen.

Bezeichnung: Ein Vektor $v \in V$ mit $\phi(v, v) = 0$ heißt **isotroper Vektor**. Die Menge der isotropen Vektoren bildet einen Kegel in V (d.h. für alle isotropen Vektoren $v \in V$ und alle Elemente $\lambda \in K$ ist λv ebenfalls ein isotroper Vektor). Dieser Kegel heißt **isotroper Kegel**.

Lemma 10.18. *Sie $\phi\colon V \times V \to K$ eine nicht entartete symmetrische Bilinearform. Gilt* $\mathrm{Char}(K) \neq 2$, *so gibt es zu jedem isotropen Vektor $v \neq 0$ einen isotropen Vektor $w \neq 0$ mit $\phi(v, w) = 1$.*

10.3 Isometrien

Definition 10.19. *Ein Paar (V, ϕ) bestehend aus einem Vektorraum V und einer symmetrischen Bilinearform ϕ auf V heißt* **quadratischer Raum**. *Sind (V, ϕ) und (W, ψ) quadratische Räume, so ist eine* **Isometrie** *ein Isomorphismus $f\colon V \to W$ mit der Eigenschaft*

$$\phi(x, y) = \psi(f(x), f(y))$$

für alle $x, y \in V$. Wir schreiben $(V, \phi) \simeq (W, \psi)$, falls eine Isometrie existiert.

Bemerkung:

1. Ist ϕ eine nicht entartete symmetrische Bilinearform auf V, so folgt aus $\phi(x,y) = \psi(f(x), f(y))$ schon, dass f injektiv ist. Gilt darüberhinaus $\dim V = \dim W$, so ist f eine Isometrie.

2. Ist $\mathrm{Char}(K) \neq 2$, so ist $f\colon V \to W$ eine Isometrie, wenn f ein Isomorphismus ist und wenn gilt $q_\phi(x) = q_\psi(f(x))$.

Satz 10.20. *(V,ϕ) und (W,ψ) seien quadratische Räume, F sei eine Basis von V und G eine Basis von W. Weiterhin sei $A_1 = M_F(\phi)$ und $A_2 = M_G(\psi)$. Eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ ist genau dann eine Isometrie, wenn die Matrix P von f bezüglich F und G invertierbar ist und*

$$P^T A_2 P = A_1$$

erfüllt.

Die Isometrien eines quadratischen Raumes (V,ϕ) in sich bilden eine Gruppe, die sogenannte **orthogonale Gruppe** $O(\phi)$ **von** (V,ϕ). Die Isometrien mit Determinante 1 bilden die sogenannte **spezielle orthogonale Gruppe** $SO(\phi)$.

Folgerung 10.21. *Ist ϕ nicht entartet, so gilt für jedes $f \in O(\phi)$*

$$\det(f) = \pm 1.$$

Für symmetrische eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ sei

$$\begin{aligned} O(A) &= \{P \in G\ell_n(K); P^T A P = A\}, \\ SO(A) &= \{P \in O(A); \det P = 1\}. \end{aligned}$$

Folgerung 10.22. *Sei (V,ϕ) ein quadratischer Raum, B eine Basis von V und $A = M_B(\phi)$. Dann definiert die Abbildung $f \mapsto M_B(F)$ einen Isomorphismus*

$$O(\phi) \simeq O(A).$$

Spezialfälle: $O_n(K) := O(E_n)$ heißt die **orthogonale Gruppe über** K und $SO_n(K) = SO(E_n)$ die **spezielle orthogonale Gruppe über** K.

10.4 Positive Definitheit und Trägheitssatz

Definition 10.23. *Eine symmetrische Bilinearform ϕ auf einem reellen Vektorraum V heißt* **positiv definit**, *wenn gilt:*

$$\phi(v, v) > 0 \quad \forall v \neq 0.$$

Positiv definite symmetrische Bilinearformen sind genau die Skalarprodukte.

Satz 10.24. *ϕ sei eine symmetrische Bilinearform auf dem reellen Vektorraum V. ϕ ist genau dann positiv definit, wenn es eine Basis B von V gibt mit $M_B(\phi) = E$.*

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = A^T$ heißt **positiv definit** genau dann, wenn $x^T Ax > 0 \quad \forall x \neq 0$.

Folgerung 10.25. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann gilt:*

$$A \textit{ ist positiv definit} \Leftrightarrow \exists P \in G\ell_n(\mathbb{R}) : P^T AP = E_n.$$

Bemerkungen:

- Mit $Q = P^{-1}$ folgt

$$A \text{ ist positiv definit} \Leftrightarrow \exists Q \in G\ell_n(\mathbb{R}) : A = Q^T Q. \tag{10.26}$$

- Für eine symmetrische, positiv definite reelle Matrix A gilt $\det A > 0$.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die **Hauptuntermatrizen** von A sind

$$A_k := (a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}.$$

$\det A_k$ heißt **Hauptunterdeterminante**.

Satz 10.26. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ein symmetrische Matrix. Dann ist A genau dann positiv definit, wenn für die Hauptunterdeterminanten zu $k = 1, \dots, n$ gilt* $\det A_k > 0$.

Eine symmetrische Bilinearform ϕ auf einem reellen Vektorraum V heißt **negativ definit**, wenn $\phi(v, v) < 0 \quad \forall v \neq 0$.

Folgerung 10.27. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ein symmetrische Matrix. Dann ist A genau dann negativ definit, wenn für die Hauptunterdeterminanten zu $k = 1, \dots, n$ gilt* $(-1)^k \det A_k > 0$.

Definition 10.28. *ϕ sei eine symmetrische Bilinearform auf einem reellen Vektorraum V. Die Signatur von ϕ ist ein Paar (r, s) natürlicher Zahlen, welche erklärt sind durch:*

- *r ist die maximale Dimension der Untervektorräume, auf denen ϕ positiv definit ist,*
- *s ist die maximale Dimension der Untervektorräume, auf denen ϕ negativ definit ist.*

Satz 10.29 (Trägheitssatz von Sylvester). *Sei ϕ eine symmetrische Bilinearform auf einem reellen Vektorraum V mit Signatur (r, s). Dann gilt für jede Orthogonalbasis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von V*

$$\begin{aligned} r &= \text{„Anzahl der } i \text{ mit } \phi(v_i, v_i) > 0.\text{“} \\ s &= \text{„Anzahl der } i \text{ mit } \phi(v_i, v_i) < 0.\text{“} \end{aligned}$$

Bemerkung: ϕ hat genau dann Signatur (r, s), wenn es eine Basis B gibt mit

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 \\ 0 & -E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{r,s}.$$

Eine solche Basis heißt **Standard–Orthogonalbasis** bezüglich ϕ.

Bemerkungen:

- Ist (r, s) die Signatur von ϕ, so gilt $\mathrm{Rang}(\phi) = r + s$. ϕ ist genau dann nicht entartet, wenn $\dim V = r + s$.
- ϕ ist positiv definit genau dann, wenn $(r, s) = (\dim V, 0)$.

Man nennt ϕ **positiv semidefinit** genau dann, wenn $\phi(v, v) \geq 0$ gilt für alle $v \in V$, also wenn $(r, s) = (r, 0)$ ist. Analog wird negativ semidefinit definiert. ϕ heißt **indefinit**, falls es $v, w \in V$ gibt mit $\phi(v, v) > 0$ und $\phi(w, w) < 0$.

Satz 10.30. *(V, ϕ) und (W, ψ) seien quadratische Räume gleicher Dimension über $\mathbb{R}$. Dann gibt es genau dann eine Isometrie zwischen (V, ϕ) und (W, ψ), wenn ϕ und ψ die gleiche Signatur haben.*

Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix, $D = P^T A P$ eine Diagonalmatrix, so ist die **Signatur von** A das Paar (r, s), wobei r (bzw. s) die Anzahl der positiven (bzw. negativen) Diagonaleinträge von D ist.

Folgerung 10.31. *Für zwei symmetrische Matrizen A_1, A_2 existiert genau dann eine invertierbare Matrix $P \in G\ell_n(K)$ mit $A_1 = P^T A_2 P$, wenn A_1 und A_2 die gleiche Signatur haben.*

10.5 Hauptachsentransformation

Satz 10.32 (Hauptachsentransformation). *Sei V ein euklidischer Vektorraum und ϕ eine symmetrische Bilinearform auf V. Dann gibt es eine Orthonormalbasis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von V mit $\phi(v_i, v_j) = 0$ für alle $i \neq j$.*

Eine solche Basis heißt **Hauptachsenbasis**. Die Werte $d_i = \phi(v_i, v_i)$ heißen die **Eigenwerte** von ϕ.

Folgerung 10.33. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann gibt es eine orthogonale Matrix P, so dass $P^T AP$ eine Diagonalmatrix ist.*

Satz 10.34. *Sei ϕ eine symmetrische Bilinearform auf einem euklidischen Vektorraum V. Ist λ_{min} der kleinste und λ_{max} der größte Eigenwert von ϕ, so gilt für alle $x \in V$*

$$\lambda_{min} \|x\|^2 \leq \phi(x, x) \leq \lambda_{max} \|x\|^2.$$

Folgerung 10.35. *ϕ sei eine symmetrische Bilinearform auf einem euklidischen Vektorraum V. Der kleinste und der größte Eigenwert von ϕ sind gegeben durch*

$$\begin{aligned} \lambda_{min} &= \min\{\phi(x, x) \,:\, \|x\| = 1\}, \\ \lambda_{max} &= \max\{\phi(x, x) \,:\, \|x\| = 1\}, \end{aligned}$$

d.h. λ_{min} (bzw. λ_{max}) ist das Minimum (bzw. das Maximum) der assoziierten quadratischen Form $q_\phi(x)$ auf der Einheitssphäre $S = \{x \in V \,:\, \|x\| = 1\}$.

10.6 Adjungierte Endomorphismen

Satz 10.36 (Darstellungssatz). *Sei V ein euklidischer Vektorraum. Zu jeder (nicht notwendig symmetrischen) Bilinearform ϕ auf V gibt es genau einen Endomorphismus $f_\phi \colon V \to V$ mit*

$$\phi(x, y) = \langle x, f_\phi(y) \rangle \quad \forall x, y \in V.$$

Bemerkungen:

- Ist B eine Orthonormalbasis von V, so haben ϕ und f_ϕ dieselbe Matrix bezüglich B.
- Die Zuordnung $\phi \mapsto f_\phi$ ist ein Isomorphismus zwischen dem Raum der Bilinearformen auf V und dem Raum der Endomorphismen von V.

Satz 10.37. *V sei ein euklidischer Vektorraum. Zu jedem Endomorphismus $f\colon V \to V$ gibt es genau einen Endomorphismus $f^*\colon V \to V$, so dass für alle $x, y \in V$ gilt:*

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle.$$

Definition 10.38. *$f^*\colon V \to V$ heißt der zu f* **adjungierte** *Endomorphismus.*

Satz 10.39. *Bezüglich einer Orthonormalbasis ist die Matrix von f^* die Transponierte der Matrix von f.*

Es gelten die Rechenregeln

$$\begin{aligned} (f \circ g)^* &= g^* \circ f^*, \\ f^{**} &= f \\ (f+g)^* &= f^* + g^* \\ (rf)^* &= r\, f^*. \end{aligned} \tag{10.40}$$

Ein Endomorphismus f auf V ist genau dann eine Isometrie, wenn $f^* \circ f = \mathrm{id}$ gilt.

Definition 10.41. *Ein Endomorphismus f auf einem euklidischen Vektorraum heißt* **selbstadjungiert***, wenn $f = f^*$ gilt.*

10.7 Spektralsatz

Satz 10.42 (Spektralsatz). *Sei V ein euklidischer Vektorraum. Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus f von V gibt es eine Orthonormalbasis von V, die aus Eigenvektoren von f besteht.*

Lemma 10.43. *f sei ein selbstadjungierter Endomorphismus eines euklidischen Vektorraums. Ist U ein f-invarianter Untervektorraum, so ist auch $U^\perp$ f-invariant.*

Lemma 10.44. *f sei ein selbstadjungierter Endomorphismus eines euklidischen Vektorraums V und q die durch $q(v) = \langle v, f(v)\rangle$ gegebene quadratische Form. Ist $\lambda_0 = \langle v_0, f(v_0)\rangle$ der maximale Wert von q auf der Sphäre $S = \{v \in V \,:\, \|v\| = 1\}$, so ist v_0 ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ_0.*

Bemerkung: Ist f ein selbstadjungierter Endomorphismus auf dem euklidischen Vektorraum V, so heißt

$$\mathrm{Spec}(f) = \{\lambda \in \mathbb{R} \,:\, \lambda \text{ ist Eigenwert von } f\}$$

das **Spektrum** von f.

Kapitel 11

Hermitesche Formen

Das **Standard-Skalarprodukt** auf $\mathbb{C}^n$ ist definiert durch

$$\langle u, v\rangle = \Sigma_{i=1}^n \bar{z}_i w_i, \tag{11.1}$$

wobei $u = (z_1, \ldots, z_n)^T, v = (w_1, \ldots, w_n)^T \in \mathbb{C}^n$. Es hat die Eigenschaften

a) Linearität in der zweiten und Semilinearität in der ersten Komponente:

$$\begin{aligned} \langle u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\rangle &= \lambda_1\langle u, v_1\rangle + \lambda_2\langle u, v_2\rangle \\ \langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v\rangle &= \bar{\lambda}_1\langle u_1, v\rangle + \bar{\lambda}_2\langle u_2, v\rangle, \end{aligned}$$

b) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$,

c) positive Definitheit, d.h.

$$\langle u, u\rangle \geq 0.$$

Definition 11.2. *Sei V ein komplexer Vektorraum. Eine Abbildung*

$$\phi \colon V \times V \to \mathbb{C}$$

heißt **hermitesche Form**, *wenn gilt*

a) ϕ ist linear in der zweiten Komponente,

b) $\phi(u, v) = \overline{\phi(v, u)}$ für alle $u, v \in V$.

11.1 Matrizenkalkül

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine komplexe Matrix. Dann heißt $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ die zu A **komplex konjugierte Matrix**.

Ist V ein komplexer Vektorraum mit Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und ϕ eine hermitesche Form auf V und $M_B(\phi) = (\phi(v_i, v_j)) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, so gilt für alle $v, w \in V$

$$\phi(v, w) = (\bar{x})^T M_B(\phi) y \tag{11.3}$$

mit $x = k_B(v), y = k_B(w)$ und es gilt

$$M_B(\phi)^T = \overline{M_B(\phi)}.$$

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt **hermitesch**, falls $A^T = \bar{A}$. Für eine hermitesche Matrix $A = (a_{ij})$ gilt:

- $a_{ii} \in \mathbb{R}$,
- $\det A \in \mathbb{R}$,
- Ist V ein n-dimensionaler Vektorraum mit Basis B, so definiert die Abbildung $\phi\colon (v, w) \mapsto \overline{k_B(v)}^T A\, k_B(w)$ eine hermitesche Form auf V mit $M_B(\phi) = A$. Dies definiert eine Bijektion zwischen den hermiteschen Formen auf V und hermiteschen $n \times n$-Matrizen.
- Sind B, B' zwei Basen von V und ist $P = P_B^{B'}$ die Basiswechselmatrix, so gilt
$$M_{B'}(\phi) = \bar{P}^T M_B(\phi) P. \tag{11.4}$$

Der **Rang** von ϕ ist definiert durch

$$\text{Rang}(\phi) = \text{Rang}(M_B(\phi)).$$

11.2 Orthogonalität

Sei V ein komplexer Vektorraum und ϕ eine hermitesche Form auf V. Zwei Vektoren $u, v \in V$ heißen **orthogonal** bezüglich ϕ, wenn $\phi(u, v) = 0$. Ist $U \subset V$ ein Untervektorraum, so heißt

$$U^\perp := \{v \in V \,:\, \phi(u, v) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das **orthogonale Komplement** von U bezüglich ϕ.

Definition 11.5. *ϕ heißt* **nicht ausgeartet**, *wenn $V^\perp = \{0\}$. Ein Untervektorraum $U \subset V$ heißt* **nicht ausgeartet** *bgzl. ϕ, wenn $U \cap U^\perp = \{0\}$.*

Satz 11.6. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

a) ϕ ist nicht ausgeartet,

b) für jede Basis B von V gilt $\det M_B(\phi) \neq 0$,

c) $\mathrm{Rang}(\phi) = \dim V$,

d) für jeden Untervektorraum $U \subset V$ gilt

$$\dim U^\perp + \dim U = \dim V.$$

Folgerung 11.7. *ϕ sei eine nicht ausgeartete, hermitesche Form auf V. Ein Untervektorraum U von V ist genau dann nicht ausgeartet bezüglich ϕ, wenn $V = U \oplus U^\perp$ gilt.*

Ein Vektor $v \in V$ heißt **isotroper Vektor** bezüglich ϕ, wenn gilt $\phi(v,v) = 0$, andernfalls heißt er **anisotrop**.

Lemma 11.8. *Ist $\phi \neq 0$, dann existiert ein anisotroper Vektor.*

Ein **Orthogonalsystem** ist ein System, das aus paarweise orthogonalen Vektoren besteht. Analog ist eine **Orthogonalbasis** definiert.

Satz 11.9. *Jedes Orthogonalsystem aus bzgl. ϕ anisotropen Vektoren kann zu einer Orthogonalbasis ergänzt werden.*

Lemma 11.10. *Für alle nichttrivialen hermiteschen Formen existiert eine Orthogonalbasis B bezüglich derer die Matrix von ϕ die Form*

$$M_B(\phi) = \begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 \\ 0 & -E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat.

Folgerung 11.11. *Für alle hermiteschen Matrizen A gibt es eine Matrix $P \in G\ell_n(\mathbb{C})$ mit*

$$\bar{P}^T A P = \begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 \\ 0 & -E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definition 11.12. *Eine hermitesche Form ϕ heißt* **positiv definit***, wenn für jeden Vektor $v \neq 0$ gilt*

$$\phi(v,v) > 0.$$

Ist ϕ positiv definit, dann existiert eine Basis B von V mit $M_B(\phi) = E$, d.h. B ist eine **Orthonormalbasis** bezüglich ϕ.
ϕ heißt **negativ definit**, wenn für alle $v \neq 0$ gilt

$$\phi(v,v) < 0.$$

Satz 11.13 (Trägheitssatz). *Sei ϕ eine hermitesche Form auf dem komplexen Vektorraum V und sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Orthogonalbasis bezüglich ϕ. Weiter sei r die Anzahl der v_j mit $\phi(v_j, v_j) > 0$ und s die Anzahl der v_j mit $\phi(v_j, v_j) < 0$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} r &= \max\{\dim U : \phi|_U \text{ ist positiv definit auf dem Untervektorraum } U\}, \\ s &= \max\{\dim U : \phi|_U \text{ ist negativ definit auf dem Untervektorraum } U\}. \end{aligned}$$

11.3 Positiv definite hermitesche Formen

Satz 11.14. *Sei ϕ eine hermitesche Form auf einem endlich dimensionalen komplexen Vektorraum V mit Basis B. Genau dann ist ϕ positiv definit, wenn alle Hauptunterdeterminanten von $M_B(\phi)$ positiv sind.*

Sei ϕ eine positiv definite hermitesche Form. Man schreibt

$$\langle v, w \rangle = \phi(v, w)$$

und spricht von einem **hermiteschen Skalarprodukt**. (V, ϕ) heißt **unitärer Raum** und wir können eine **Norm** auf V definieren durch

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Satz 11.15 (Cauchy–Schwarz). *In einem unitären Vektorraum gilt*

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

Folgerung 11.16 (Dreiecksungleichung). *In einem unitären Vektorraum gilt*

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Satz 11.17. *Sei* $\{v_1, \dots, v_n\}$ *eine Basis eines unitären Vektorraums* V*. Dann gibt es eine Orthonormalbasis* $\{w_1, \dots, w_n\}$ *von* V*, so dass*

$$L(\{w_1, \dots, w_k\}) = L(\{v_1, \dots, v_k\}), \quad k = 1, \dots, n.$$

Definition 11.18. *Sei* V *ein unitärer Vektorraum. Ein Endomorphismus* $f \colon V \to V$ *heißt* **Isometrie***, wenn gilt*

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle. \tag{11.19}$$

Satz 11.20. *Die Isometrien eines unitären Vektorraums* V *bilden eine Untergruppe von* $G\ell(V)$*.*

Diese Gruppe heißt die **unitäre Gruppe** von V und wird mit $U(V)$ bezeichnet.
Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt **unitär**, wenn $\bar{A}^T A = E$ gilt. Die unitären Matrizen bilden eine Untergruppe $U(n)$ von $G\ell_n(\mathbb{C})$, die **unitäre Gruppe**. Die unitären Matrizen mit Determinante 1 bilden die **spezielle unitäre Gruppe** $SU(n)$.

Lemma 11.21. *Ein Endomorphismus* $f \colon V \to V$ *eines unitären Vektorraums* V *ist genau dann eine Isometrie, wenn die Matrix* $M_B(f)$ *bezüglich einer Orthonormalbasis* B *unitär ist.*

11.4 Spektralsatz

Satz 11.22. *Sei* f *ein Endomorphismus eines unitären Vektorraums* V*. Dann gibt es genau einen Endomorphismus* f^* *von* V *mit der Eigenschaft*

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle$$

für alle $v, w \in V$*.*

Man nennt f^* den zu f **adjungierten** Endomorphismus.

Bemerkungen:

a) Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt $A^* = \bar{A}^T$ die zu A **adjungierte** Matrix. Hat ein Endomorphismus bezüglich einer Orthonormalbasis die Darstellungsmatrix A, so hat der adjungierte Endomorphismus bezüglich dieser Basis die Darstellungsmatrix A^*.

b) Ein Endomorphismus f ist genau dann eine Isometrie, wenn $f^*f = \mathrm{id}$ gilt.

Definition 11.23. *Ein Endomorphismus f eines unitären Vektorraums V heißt* **selbstadjungiert**, *wenn $f = f^*$ gilt, d.h. wenn*

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle$$

für alle $v, w \in V$ gilt.

Satz 11.24 (Spektralsatz). *Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus f eines unitären Vektorraums V gibt es eine Orthonormalbasis von V, die aus Eigenvektoren von f besteht.*

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt **hermitesch**, wenn gilt $A^* = A$. Ist A hermitesch, so existiert eine unitäre Matrix P, so dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist. Man sagt A lässt sich **unitär diagonalisieren**.

Folgerung 11.25. *Zu jeder hermiteschen Form ϕ auf einem unitären Vektorraum V gibt es eine Orthonormalbasis von V, die gleichzeitig eine Orthogonalbasis bzgl. ϕ ist.*

Ein Endomorphismus f eines unitären Vektorraums V heißt **normal**, wenn gilt $f f^* = f^*f$.

Satz 11.26. *Ein Endomorphismus eines unitären Vektorraums ist genau dann unitär diagonalisierbar, wenn er normal ist.*