Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. C.–J. Heine

27.04.2009

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

SS 2009 — Blatt 2

ÜBUNGSAUFGABEN

Abgabe: Montag, 04.05.2009, vor der Vorlesung.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Bilden Sie soweit möglich die Matrix–Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ für

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 7. (2 Punkte)

Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8. (6 Punkte)

a) Geben Sie die allgemeine Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$ an:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & & & & & - & 6x_4 & + & 3x_5 & = & 0\,. \end{array}$$

b) Bringen Sie die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix auf Stufenform und geben Sie die Lösungsmenge des zugehörigen linearen Gleichungssystems an:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 9 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & -2 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

bitte wenden

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des $\mathbb{R}^n$ (mit $n \geq 3$):

a) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, x_1 \cdot x_2 = 0\}$,

b) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, x_1 = 0\} \cap \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, x_2 = 0\}$,

c) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, x_1 - 3x_2 + \pi x_3 = a\}$, wobei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist,

d) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$.

Aufgabe 10. (5 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum und seien W, U Unterräume.

a) Zeigen Sie, dass auch $W \cap U$ ein Unterraum von V ist.

b) Im allgemeinen ist $W \cup U$ kein Unterraum von V. Geben Sie konkrete Beispiele für V, W und U an, so dass $W \cup U$ kein Unterraum von V ist. Welche Unterraumeigenschaft wird nicht erfüllt? Berechnen Sie im Vergleich dazu $W \cap U$.

c) Im Allgemeinen gilt: $W \cup U$ ist genau dann ein Unterraum von V, wenn $W \subset U$ oder $U \subset W$ gilt. Beweisen Sie dies.

Hinweise:

Die Übungstermine vom 1. Mai werden wie folgt verlegt:

Fr, 01.05., 9–11 Uhr $\longrightarrow$ Di, 28.04., 16–18 Uhr, Raum 318, Eckerstraße 1
Fr, 01.05., 14–16 Uhr $\longrightarrow$ Di, 28.04., 18–20 Uhr, SR 226, Hermann–Herder–Str. 10

Aktuelle Aufgabenblätter und Ankündigungen finden Sie unter

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/

in der Rubrik „Lehre“ unter „Vorlesungsskripte/Übungsblätter“.