

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

SS 2009 — Blatt 5

ÜBUNGSAUFGABEN

Abgabe: Montag, 25.05.2009, vor der Vorlesung.

Aufgabe 21.

(4 Punkte)

Beweisen Sie mit Induktion über $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, dass gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

mit $x_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$). Dies ist die sogenannte *Vandermonde-Determinante*.

Hinweis: Versuchen Sie es mit Spaltenumformungen!

Aufgabe 22.

(3 Punkte)

Beweisen Sie für zwei Spaltenvektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$:

$$\det(\mathbf{E} + \mathbf{a}\mathbf{b}^T) = 1 + \mathbf{a}^T \mathbf{b}.$$

Aufgabe 23.

(3 Punkte)

Orthonormalisieren Sie mit Hilfe des Gram–Schmidt–Verfahrens das folgende System bzgl. des Standardskalarproduktes:

$$\mathbf{u}_1 = (1, 2, 1)^T, \quad \mathbf{u}_2 = (2, 1, 1)^T, \quad \mathbf{u}_3 = (1, 0, 1)^T.$$

bitte wenden

Aufgabe 24.

(2 Punkte)

Zu $i = 1, 2$ seien $R_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ die Drehungen, die jeweils durch die Drehachsen \mathbf{r}_i und Drehwinkel α_i definiert sind, mit

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{6},$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{4}.$$

Berechnen Sie $R_1 R_2$ und $R_2 R_1$.

Aufgabe 25.

(4 Punkte)

Berechnen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 8 & 2 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & -2 & 0 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}.$$

Aufgabe 26.

(4 Punkte)

Berechnen Sie eine Basis des Kerns von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 & -7 & -8 & -9 \\ -10 & -11 & -12 & -13 & -14 & -15 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 6}.$$

Hinweise:

Wir bieten folgende Ersatztermine für die beiden Übungen, die aufgrund des Feiertags am Donnerstag ausfallen, an:

Gruppe 3 (Thierry Fredrich) — Di, 19.05., 18 – 20 Uhr, SR 00-031 (MMR), Geb. 51
Gruppe 4 (Sarah Mohr) — Di, 19.05., 17:30 – 19:30 Uhr, Raum 318, Eckerstr. 1

Aktuelle Aufgabenblätter und Ankündigungen finden Sie unter

<http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/>

in der Rubrik „Lehre“ unter „Vorlesungsskripte/Übungsblätter“.