Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. C.–J. Heine 08.06.2009

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

SS 2009 — Blatt 7

ÜBUNGSAUFGABEN

Abgabe: Montag, 15.06.2009, vor der Vorlesung.

Aufgabe 31. (6 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A. Begründen Sie, dass A nicht diagonalisierbar ist.

b) Bringen Sie A durch Basiswechsel auf Jordangestalt. (Seien $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_1, λ_2. Diese bilden zwei der drei Spalten der Basiswechselmatrix. Um die dritte Spalte zu berechnen, suchen Sie sich den Eigenwert, dessen algebraische Vielfachheit größer als die geometrische Vielfachheit ist. Sei dies $\tilde{\boldsymbol{v}}$ mit Eigenwert $\tilde{\lambda}$. Lösen Sie nun die Gleichung $(\tilde{\lambda}E - A)\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{v}}$. Die Lösung stellt den gesuchten fehlenden Spaltenvektor dar. Bringen Sie nun die drei Spalten der Basiswechselmatrix B in die richtige Reihenfolge. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe der Rechnung $B^{-1}AB$.)

c) Berechnen Sie A^{2009}. (Tipp: Zerlegen Sie die Jordanmatrix J aus Teil a) in $D+N$, wobei D Diagonalgestallt hat und N die Einsen der Nebendiagonale enthält. Dann lässt sich J^{2009} mit Hilfe der Binomialformel

$$J^{2009} = \sum_{j=0}^{2009} \binom{2009}{j} D^{2009-j} N^j.$$

leicht berechnen.)

Aufgabe 32. (10 Punkte)

a) Sei $q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ eine quadratische Form mit

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 3\sqrt{2} & 3 \\ 3\sqrt{2} & 2 & -3\sqrt{2} \\ 3 & -3\sqrt{2} & 5 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie ein Hauptachsensystem von q, d.h. geben Sie eine Orthonormalbasis B an, so dass $B^T AB$ Diagonalgestalt hat. Um welches geometrische Objekt handelt es sich bei der Menge $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | \, q(\boldsymbol{x}) = 1\}$?

Hinweis: Ist λ Eigenwert von A, so ist 4λ Eigenwert von $4A$, d.h. $\chi_{4A}(4\lambda) = 0$.

bitte wenden

b) Sei $q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ eine quadratische Form mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie ein Hauptachsensystem von q, d.h. geben Sie eine Orthonormalbasis an, so dass $B^T AB$ Diagonalgestalt ist. Um welches geometrische Objekt handelt es sich bei der Menge $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 |\, q(\boldsymbol{x}) = 1\}$?

Aufgabe 33. (4 Punkte)

Sei $\boldsymbol{x} : [0, 10] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 - t^2 \\ \frac{4}{3} t^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Bogenlänge von $\boldsymbol{x}$.

Hinweise:

Wir bieten folgende Ersatztermine für die beiden Übungen, die aufgrund des Feiertags am Donnerstag ausfallen, an:

Gruppe 3 (Thierry Fredrich) — Di, 09.06., 18:00 Uhr, SR 00-031 (MMR), Geb. 51.
Gruppe 4 (Sarah Mohr) — Di, 09.06., 18:00 Uhr, Raum 404, Eckerstr. 1

Aktuelle Aufgabenblätter und Ankündigungen finden Sie unter

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/

in der Rubrik „Lehre“ unter „Vorlesungsskripte/Übungsblätter“.