Institut für Angewandte Mathematik 20.04.2009
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. C.–J. Heine

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

SS 2009 — Blatt 1

ÜBUNGSAUFGABEN

Abgabe: Montag, 27.04.2009, in der Vorlesung.

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Reihe:

$$A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} x^n.$$

Untersuchen Sie das Verhalten der Reihe in den Randpunkten.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylor-Reihe der folgenden Funktion im Entwicklungspunkt $a = 0$:

$$f(x) := \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

Bestimmen Sie außerdem den Konvergenzradius.

Tipp: Nützlich sind die Sätze über gliedweise Differentiation und Integration, Cauchyprodukt und Binomische Reihe.

Aufgabe 3. (6 Punkte)

a) Zeigen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe, dass die folgenden Reihen für alle $x \in (-1, 1)$ absolut gegen die nebenstehenden Werte konvergieren:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \qquad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}.$$

b) Aufgrund der Identität

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x},$$

lässt sich die dritte Reihe als Summe (mit Vorfaktor 1/2) und als Produkt der ersten beiden Reihen darstellen. Verifizieren sie an diesem Beispiel die Rechenregeln für unendliche Reihen, d.h. Addition und Cauchyprodukt von unendlichen Reihen.

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die beiden folgenden linearen Gleichungssysteme jeweils lösbar sind und geben Sie ggf. eine Lösung $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ an.

$$\text{a)}\quad \begin{array}{rcrcrcl} 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ 2\,x_1 & + & 3\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & 1. \end{array} \qquad \text{b)}\quad \begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 3\,x_2 & = & 4, \\ 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & = & 6, \\ 2\,x_1 & + & 5\,x_2 & = & 7. \end{array}$$

Aufgabe 5. (3 Punkte)

a) Geben Sie zwei verschiedene Lösungen $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ der linearen Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

an.

b) Geben Sie drei verschiedene Lösungen der linearen Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

an.

c) Rechnen Sie nach: Ist $\boldsymbol{c}_0$ eine der Lösungen der inhomogenen Gleichung aus Teil b) und $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ die Lösungen der homogenen Gleichung aus Teil a) und $r, s \in \mathbb{R}$ beliebig, so löst $\boldsymbol{c}_0 + r\,\boldsymbol{a} + s\,\boldsymbol{b}$ auch die inhomogene Gleichung aus Teil b).

Hinweise:

Aktuelle Aufgabenblätter und Ankündigungen finden Sie unter

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/

in der Rubrik „Lehre“ unter „Vorlesungsskripte/Übungsblätter“.

- Zulassungsvoraussetzung für die Klausur sind regelmäßige Teilnahme an den Übungen, zweimaliges Vorrechnen in den Übungen sowie das Erreichen von 50% der Punkte aus den Übungsaufgaben.
- Diese Bedingungen gelten auch für Kandidatinnen und Kandidaten, die an der Klausur zum wiederholten Mal teilnehmen möchten.