Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. C.–J. Heine

06.07.2009

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

SS 2009 — Blatt 11

ÜBUNGSAUFGABEN

Abgabe: Montag, 13.07.2009, vor der Vorlesung.

Aufgabe 46. (6 Punkte)

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ sei $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ definiert durch

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{(x+y+z)^3} \begin{pmatrix} x+y-3z \\ ax+by+cz \\ 3x+3y-z \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich D von $\boldsymbol{v}$. Ist D einfach zusammenhängend?

b) Für welche Werte von a, b, c hat $\boldsymbol{v}$ lokal ein Potential U?

c) Wählen Sie ein maximales einfach zusammenhängendes Gebiet $G \subset D$ aus und berechnen Sie das Potential U auf G.

Aufgabe 47. (5 Punkte)

Für $p > 0$ sei $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) := -\|\boldsymbol{x}\|^{p-2}\boldsymbol{x}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{v}$ auf dem gesamten Definitionsbereich ein Potential U hat und berechnen Sie dies.

b) Nehmen wir an, ein Massenpunkt mit Masse $m > 0$ bewege sich auf einer periodischen, kreisförmigen Umlaufbahn γ mit Radius R und Winkelgeschwindigkeit ω um den Nullpunkt im Potentialfeld $m\,U$. Bestimmen Sie ω in Abhängigkeit von R so, dass sich das Teilchen kräftefrei bewegt, d.h. die Kräfte der Bewegungsänderung nur auf Grund des Potentials hervorgerufen werden. Der Massenpunkt gehorcht dabei der Differentialgleichung

$$\gamma''(t) = \boldsymbol{v}\big(\gamma(t)\big).$$

bitte wenden

Aufgabe 48. (5 Punkte)

Seien $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$ zwei C^1-Vektorfelder im $\mathbb{R}^3$, so gilt in der Nabla–Schreibweise

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}).$$

Wendet man die Regeln für das Spatprodukt an, so hätte man formal die Beziehung

$$\nabla \cdot (f \times g) = g \cdot (\nabla \times f) = -f \cdot (\nabla \times g),$$

d.h.

$$\operatorname{div}(f \times g) = \quad g \cdot \operatorname{rot} f \quad = -f \cdot \operatorname{rot} g.$$

Diese Formeln sind jedoch falsch. Geben Sie Gegenbeispiele $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$ für die obigen formalen Formeln an. Wie muss die Formel für $\operatorname{div}(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g})$, ausgedrückt über die Rotation von $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$, richtig lauten?

Aufgabe 49. (4 Punkte)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein konvexes Gebiet, $\boldsymbol{f} \in C^{k+1}(D, \mathbb{R}^m)$ und $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v} \in D$.
Dann gilt laut Vorlesung mit $\boldsymbol{x} := \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v}$ die Taylorformel

$$f_i(\boldsymbol{x}) = p_i(\boldsymbol{x}) + R_{i,k}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{v}) \ (i = 1, \ldots, m)$$

mit Polynomen p_i höchstens k–ten Grades in den Komponenten von $\boldsymbol{x}$ und dem gemäß Vorlesung definierten Restglied $R_{i,k}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{v})$ $(i = 1, \ldots, m)$. Analog zum skalaren Fall bezeichnet man die vektorwertige Funktion

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \big(p_1(\boldsymbol{x}), \ldots, p_m(\boldsymbol{x})\big)^T$$

als Taylorpolynom k–ter Ordnung von $\boldsymbol{f}$ zum Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}_0$.
Berechnen Sie das Taylorpolynom $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ zweiter Ordnung zum Entwicklungspunkt $(0,0,0)^T$ für die Funktion

$$\boldsymbol{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_3 \exp(x_1^2 - x_2^2) \\ x_1 \sin x_1 + x_2 \cos x_2 \end{pmatrix}.$$

Hinweise:

Aktuelle Aufgabenblätter und Ankündigungen finden Sie unter

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/

in der Rubrik „Lehre“ unter „Vorlesungsskripte/Übungsblätter“.