Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. C.–J. Heine 21.07.2009

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

Lösungen BONUSAUFGABEN

Aufgabe 1.

a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \lambda-6 & -2 & 2 \\ -3 & \lambda-5 & 3 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \lambda-8 & 0 & 2 \\ \lambda-8 & \lambda-2 & 3 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda-3 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda-8)\big((\lambda-2)(\lambda-3) - 3(\lambda-2)\big) - (\lambda-8)\big(-2(\lambda-2)\big) \\
&= (\lambda-8)(\lambda-2)(\lambda-3-3+2) \\
&= (\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda-8).
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 8$, jeweils mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 1.

Eigenvektoren:

Zu $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wähle als Eigenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zu $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wähle als Eigenvektor $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zu $\lambda_3 = 8$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wähle als Eigenvektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Eigenräume sind also

$$E(2) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad E(4) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad E(8) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

b) Eigenwerte zu

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned}
\chi_{2B}(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - 5 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 3 & -1 \\ -2 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \lambda - 4 & \lambda - 2 & 0 \\ 1 & \lambda - 3 & -1 \\ -2 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \lambda - 4 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & -1 \\ \lambda - 4 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \\
&= (\lambda - 4)(\lambda - 3)(\lambda - 2) + (\lambda - 4)(-(\lambda - 2)) \\
&= (\lambda - 2)(\lambda - 4)(\lambda - 3 - 1) \\
&= (\lambda - 2)(\lambda - 4)^2.
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte von B sind also wegen

$$\big(\chi_{2B}(2\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_B(\lambda) = 0\big)$$

durch $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ gegeben.
Die algebraische und geometrische Vielfachheit von λ_1 ist 1, die algebraische Vielfachheit von λ_2 ist 2, die geometrische bleibt zu bestimmen (s.u.).

Eigenvektoren zu λ_1:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wähle als Eigenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $E(1) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Zu $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d.h. $\dim E(2) = 1$, wähle als Eigenvektor $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h. $E(2) = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ und die geometrische Vielfachheit von λ_2 ist 1.

Aufgabe 2.
Die unten benutzten Symbole $A_{ij}(\alpha)$ bzw. $M_i(\alpha)$ bezeichen die elementaren Zeilenumformungen „Addieren des α–fachen der i–ten Zeile zur j–ten Zeile“ bzw. „Multiplizieren der i–ten Zeile mit α“.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & b_1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 & b_2 \\ 3 & 2 & -11 & 2 & 2 & b_3 \end{array}\right) \xrightarrow[A_{1,3}(-3)]{A_{1,2}(-2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & -3 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -4 & -20 & 2 & -1 & b_3 - 3b_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[A_{2,1}(2)]{A_{2,3}(-4)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -7 & 0 & -5 & b_1 + 2b_2 - 4b_1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & -3 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 11 & b_3 - 3b_1 - 4b_2 + 8b_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{M_2(-1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -7 & 0 & -5 & 2b_2 - 3b_1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 3 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 11 & 5b_1 - 4b_2 + b_3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{M_3(1/2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -7 & 0 & -5 & 2b_2 - 3b_1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 3 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11/2 & 5/2b_1 - 2b_2 + b_3/2 \end{array}\right).$$

Die allgemeine Lösung ist dann

$$v_0 + \alpha v_1 + \beta v_2 \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

mit

$$\begin{aligned} v_0 &= \Big(2b_2 - 3b_1,\ 2b_1 - b_2,\ 0,\ \frac{1}{2}\big(5b_1 - 4b_2 + b_3\big), 0\Big)^T, \\ v_1 &= \Big(5, -3, 0, -\frac{11}{2}, 1\Big)^T, \\ v_2 &= (7, 5, 1, 0, 0)^T. \end{aligned}$$

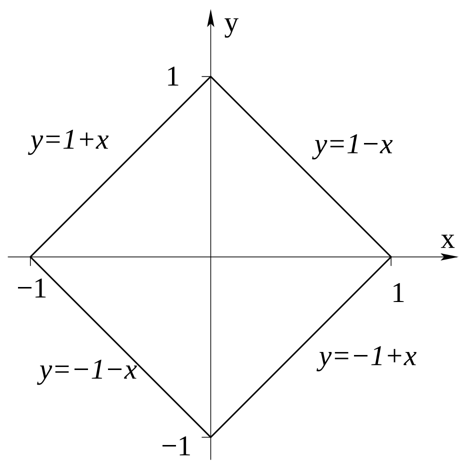
Aufgabe 3.
Wegen $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ gilt jedenfalls auf ∂B, dass

$$|x| + |y| = 1$$

ist. Detaillierter:

- $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:
  $\Rightarrow\; x(t) = \cos^2(t),\; y(t) = \sin^2(t)$, d.h. $y = 1 - x\; \big(x \in [0,1]\big)$.
- $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$:
  $\Rightarrow\; x(t) = -\cos^2(t),\; y(t) = \sin^2(t)$, d.h. $y = 1 + x\; \big(x \in [-1,0]\big)$.
- $t \in \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$:
  $\Rightarrow\; x(t) = \cos^2 t,\; y(t) = -\sin^2(t)$, d.h. $y = -1 - x\; \big(x \in [-1,0]\big)$.
- $t \in \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$:
  $\Rightarrow\; x(t) = \cos^2(t),\; y(t) = -\sin^2(t)$, d.h. $y = -1 + x\; \big(x \in [0,1]\big)$.

Skizze also:



Aus Symmetriegründen reicht es, über den positiven Quadranten zu integrieren, d.h. der Flächeninhalt $F(B)$ berechnet sich wie folgt.

$$F(B) = 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} 1dy\, dx = 4 \int_0^1 1 - x\, dx = 4 \cdot \big(1 - \frac{1}{2}\big) = 2.$$

(Hier lohnt sich als „Cross–Check“ der Vergleich mit der geometrischen Anschauung).

Aufgabe 4.
f ist nicht stetig in $\mathbf{0}$. Betrachte dazu die Kurve $\gamma : t \mapsto (\sqrt{t}, t) \quad (t \geq 0)$.
γ ist in 0 stetig und es gilt $f \circ \gamma(0) = f(0) = 0$, jedoch

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} f \circ \gamma(t) = \frac{t}{\sin t} = 1 \quad \text{(l'Hospital, bzw. Vorlesung).}$$

Stetigkeit auf allen Geraden durch $\mathbf{0}$:
Auf der Geraden $\big\{(0,y) | y \in \mathbb{R}\big\}$ ist f konstant 0, also insbesondere stetig. Alle anderen Geraden haben eine Darstellung als Graph

$$g_\alpha : x \mapsto \alpha x \quad (x \in \mathbb{R},\; \alpha \in \mathbb{R} \text{ fest}).$$

Es ist nun

$$f \circ g_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sin \alpha x}, & \sin \alpha x \neq 0 \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

Weiter gilt

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{2x}{\alpha \cos \alpha x} = 0, \text{ also wegen l'Hospital auch} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f \circ g_\alpha(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{x^2}{\sin \alpha x} = 0.$$

Also ist f auf allen Geraden durch $\mathbf{0}$ in $\mathbf{0}$ stetig.