Abteilung für Angewandte Mathematik 31.10.2011
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2011/12 — Woche 2
Abgabe: Montag, den 7. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Euler-Lagrange Gleichung — 6 Punkte

Sei $1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$, $f \in C(\overline{\Omega})^n$ und $g \in C(\partial\Omega)^n$. Auf $X := \{w \in C^\infty(\overline{\Omega})^n \mid w = g \text{ auf } \partial\Omega\ \}$ definieren wir das Energiefunktional

$$E(w) := \int\limits_\Omega \frac{1}{p}|\nabla w|^p \, dx - \int\limits_\Omega f \cdot w \, dx.$$

Berechnen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen für einen Minimierer $u \in X$.

Definition
Sei $T : M \subseteq X \to Y$, wobei X, Y normierte Vektorräume sind. Der Operator T heisst **kompakt**, wenn gilt: T ist stetig und T bildet beschränkte Mengen $B \subset M$ auf relativ kompakte Mengen ab, d.h. $\overline{T(B)}$ ist kompakt. Der Operator heisst **vollstetig** falls gilt: T ist stetig und aus $x_n \rightharpoonup x$ in X folgt $Tx_n \to Tx$ in Y.

Aufgabe 2 — 7 Punkte

Ist X ein reflexiver Banachraum, Y ein Banachraum und $T : X \to Y$ linear, so ist T genau dann kompakt, wenn T vollstetig ist.
Tipp: Satz von Eberlein-Šmuljan.

Aufgabe 3: kompakter Integraloperator — 7 Punkte

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $f \in C(I \times I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in C(I, I)$. Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Arzelà-Ascoli, dass der Operator

$$\begin{aligned} F : C(I, \mathbb{R}^n) &\to C(I, \mathbb{R}^n) \\ u(\cdot) &\mapsto Fu(\cdot) := \int_a^{\varphi(\cdot)} f(\cdot, s, u(s)) \, ds \end{aligned}$$

unter diesen Voraussetzungen kompakt ist.