Abteilung für Angewandte Mathematik 7.11.2011
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2011/12 — Woche 3
Abgabe: Montag, den 14. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 **5 Punkte**

Für die Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ gelte $a_{ij} \geq 0$ für alle $i, j = 1, \dots, n$. Zeigen Sie, dass dann ein nicht-negativer Eigenwert λ von A existiert und für den zugehörigen Eigenvektor $x_i \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt. **Tipp:** betrachten Sie die Menge $P := \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_1 = 1,\ x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, n \,\}$.

Aufgabe 2: **10 Punkte**

Für $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ sei $I := [t_0 - a, t_0 + a]$. Die Funktion $f : I \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ genüge der folgenden **Carathéodory-Bedingung:** Für fast alle $t \in I$ ist $f(t, \cdot)$ stetig und für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f(\cdot, x)$ messbar. Ausserdem existiere ein $h \in L^1(I)$ so dass $|f(t, x)| \leq h(t)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) \ \text{ für fast alle } t \in I, \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

mindestens eine Lösung $x \in C(I)$ besitzt.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Sei $K = [a, b]$, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto x + 2$ und $T : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Sei M der Graph von φ, d.h. $M := \{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [a, b]\}$. Nach Vorlesung existiert nun eine Lösung $u \in [a, b]$ mit

$$(\varphi(x) - Tu)(x - u) \geq 0.$$

Verifizieren Sie dies für $[a, b] = [-3, 0]$, bzw. $[a, b] = [0, 3]$, bzw. $[a, b] = [0.5, 1.5]$ bzw. $[a, b] = [-6, -3]$. Geben Sie die Lösungen konkret an.