Abteilung für Angewandte Mathematik 14.11.2011
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2011/12 — Woche 4

Abgabe: Montag, den 21. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: stetige, nicht kompakte Abbildung — 5 Punkte

Wir definieren die Räume $l^\infty := \{\ x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid \|x\|_\infty < \infty\ \}$ mit $\|x\|_\infty := \sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i|$ und $c_0 := \{\ x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid \lim\limits_{i\to\infty} x_i = 0\ \}$. Begründen Sie kurz, dass c_0 ein Unterraum von l^∞ ist und zeigen Sie, dass die Abbildung $f : c_0 \to c_0$ mit $f(x) := (x_i^3)_{i\in\mathbb{N}}$ stetig aber nicht kompakt ist.

Aufgabe 2: Banach+Schauder — 7 Punkte

Sei X ein Banachraum und sei $B \subset X$ eine abgeschlossene, konvexe und beschränkte Teilmenge. Ferner sei $T : B \to X$ kompakt, $S : B \to X$ eine Kontraktion und es gelte $T(B) + S(B) \subset B$. Zeigen Sie, dass $T + S$ einen Fixpunkt in B hat. **Tipp:** für festes $x_0 \in B$ hat der Operator $R = Tx_0 + S$ einen Fixpunkt $x^* = x^*(x_0)$. Zeigen Sie dann, dass die Abbildung $x_0 \mapsto x^*(x_0)$ einen Fixpunkt hat.
Benutzen Sie dieses Resultat um anschließend zu beweisen, dass das Problem

$$u(t) = \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}u(t)^2 + \frac{1}{3}\int_0^t |u(s) - s|^{\frac{1}{2}}\, ds\ , t \in [0, 1]$$

eine Lösung $u \in C^0([0, 1], [0, 1])$ besitzt.

Aufgabe 3: elliptische, nicht-lineare Gleichung — 8 Punkte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand und sei $A \in L^\infty(\Omega)^{n\times n}$ α-elliptisch, das heißt es gelte $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}\lambda_i\lambda_j \geq \alpha|\lambda|^2$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Gegeben sei außerdem eine global-Lipschitz-stetige Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $H(0) = 0$ und Lipschitzkonstante c_L. Ferner bezeichne c_P die Poincaré-Konstante des Gebiets Ω, das heißt die kleinste Konstante, so dass $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt. Beweisen Sie unter geeigneten Voraussetzungen an die Konstanten c_P, c_l und α die Existenz einer schwachen Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(A\nabla u) &= H(u) && \text{in } \Omega,\\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit Hilfe des Schauder'schen Fixpunktsatzes.
Tipp: Verwenden Sie Lax-Milgram für das linearisierte Problem und orientieren Sie sich am Beispiel aus der Vorlesung.