Abteilung für Angewandte Mathematik 21.11.2011
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2011/12 — Woche 5

Abgabe: Montag, den 28. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Separabilität von Bochnerräumen 4 Punkte

Sei $1 \leq p < \infty$, X ein Banachraum und $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Zeigen Sie, dass $L^p(I, X)$ genau dann separabel ist, wenn X separabel ist.

Aufgabe 2: Vektorwertige Distributionen 10 Punkte

Sei $1 \leq p < \infty$, $I := (a, b) \subset \mathbb{R}$ und X ein Banachraum.

1. Zeigen Sie: Für $u \in L^p(I, X)$ gilt auch $u_h \in L^p(I, X)$, wobei
$$u_h(t) = \begin{cases} u(t+h) & \text{für } t+h \in I \\ 0 & \text{für } t+h \notin I. \end{cases}$$
Zeigen Sie außerdem $\lim_{h \to 0} \|u_h - u\|_{L^p(I,X)} = 0$.

2. Zeigen Sie: Für $u \in L^p(I, X)$ ist die durch $v(t) := \int_{t_0}^t u(s)\, ds$, $t_0 \in I$, definierte Funktion $v : I \to X$ fast überall in I differenzierbar mit $v'(t) = u(t)$.

3. Wir versehen den Raum $C_0^\infty(I)$ mit dem folgenden Konvergenzbegriff: eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(I)$ konvergiert gegen φ in $C_0^\infty(I)$ falls eine kompakte Menge $K \subset I$ existiert, so dass $\operatorname{supp}(\varphi_n)$, $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K$ für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \to \infty} \|\varphi_n^{(\alpha)} - \varphi^{(\alpha)}\|_{C^0(K)} = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}$ gilt. Sei außerdem $\mathcal{L}(C_0^\infty(I), X)$ der Raum der stetigen linearen Abbildungen von $C_0^\infty(I)$ nach X. Die Konvergenz in $\mathcal{L}(C_0^\infty(I), X)$ definieren wir durch $T_n \to T :\Leftrightarrow \langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(I)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $T : L^p(I, X) \to \mathcal{L}(C_0^\infty(I), X)$, mit
$$\langle Tu, \varphi \rangle := \int_I u(s) \varphi(s)\, ds$$
wohldefiniert, linear, stetig und injektiv ist.

Aufgabe 3 : Wirbelterm 6 Punkte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet und $X := W_0^{1,2}(\Omega)^3$. Der Wirbelterm $b_u : X^2 \to \mathbb{R}$ ist für festes $u \in X$ definiert durch
$$b_u(v, w) := \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u_i \partial_i v_j w_j\, dx.$$
Zeigen Sie, dass b_u wohldefiniert und sogar in jedem Punkt Fréchet-differenzierbar ist.