Abteilung für Angewandte Mathematik 28.11.2011
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2011/12 — Woche 6
Abgabe: Montag, den 5. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Implizite Funktionen 7 Punkte

Für festes $T \in (0, \pi)$ definieren wir die mit ihren Standardnormen versehenen Räume $X = Z = C^0([0,T])$ und $Y = \{ u \in C^1([0,T]) \,|\, u(0) = 0 \}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass das Problem

$$\begin{aligned} u' - u^2 - 1 &= f \quad \text{in } (0,T) \\ u(0) &= 0 \end{aligned}$$

für jedes $f \in B_\varepsilon(0) \subset X$ genau eine Lösung $u = G(f) \in Y$ besitzt. Zeigen sie außerdem $G \in C^1(B_\varepsilon(0), Y)$ und bestimmen Sie $G'(0)$.
Tipp: Die Formel

$$\varphi(t) = e^{-P(t)} \int_0^t e^{P(s)} \eta(s)\, ds$$

könnte hilfreich sein.

Aufgabe 2: Monotonie 6 Punkte

Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$g(u) = \begin{cases} |u|^{p-2}u & \text{für } u \neq 0 \\ 0 & \text{für } u = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

1. Für $p > 1$ ist g strikt monoton.
2. Für $p \geq 2$ gilt $\langle g(u) - g(v), u - v \rangle \geq c\, |u - v|^p$.
3. Für $p = 2$ ist g stark monoton.

Tipp: Betrachten Sie die Funktion $h(u, v) := g'(u)v^2$ und für den Fall $p \geq 2$ die Identität

$$\langle g(u) - g(v), u - v \rangle = \frac{|u|^{p-2} + |v|^{p-2}}{2} |u - v|^2 + \frac{|u|^{p-2} - |v|^{p-2}}{2} (|u|^2 - |v|^2).$$

Aufgabe 3: Zarantonello+Anwendung 7 Punkte

Sei H ein Hilbertraum und $A : H \to H^*$ stark monoton und Lipschitz-stetig, d.h. $\|Au - Av\|_{H^*} \leq L\, \|u - v\|_H$, für alle $u, v \in H$. Sei außerdem $j : H^* \to H$ die Riesz'sche Abbildung, das heißt $(jf, u) = \langle f, u \rangle$ für $f \in H^*, u \in H$. Zeigen Sie mit Hilfe der Abbildung $F_\varepsilon : H \to H$, $F_\varepsilon(u) := u + j(\varepsilon f - \varepsilon Au)$, dass $A : H \to H^*$ bijektiv ist.

bitte wenden

Betrachten Sie anschließend das Randwertproblem

$$
\begin{aligned}
-\Delta u + \Phi(x,u) &= f \text{ in } \Omega \\
u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega,
\end{aligned}
$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, glatt berandetes Gebiet sei. Formulieren Sie das Randwertproblem als Operatorgleichung auf einem geeigneten Funktionenraum und stellen Sie (nichttriviale) Forderungen an f und die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass Sie Ihre Operatorgleichung mit Hilfe des Satzes von Zarantonello lösen können.