Abteilung für Angewandte Mathematik 05.12.2011
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2011/12 — Woche 6
Abgabe: Montag, den 12. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Folgerung aus Browder-Minty 6 Punkte

Sei X ein separabler, reflexiver, reeller Banachraum und sei $A : X \to X^*$ ein strikt monotoner, koerziver, hemistetiger Operator. Zeigen Sie, dass dann der Operator $A^{-1} : X^* \to X$ existiert und außerdem strikt monoton und demistetig ist.

Aufgabe 2: radialstetiger Operator 6 Punkte

Sei X ein reeller, separabler und reflexiver Banachraum. Man nennt einen Operator $A : X \to X^*$ **radialstetig** falls die Abbildung $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $F(t) := \langle A(u + tv), v\rangle$, für alle $u, v \in X$ stetig ist. Zeigen Sie, dass für einen monotonen Operator $A : X \to X^*$ die Begriffe radialstetig, demistetig und hemistetig äquivalent sind.

Aufgabe 3: Dualraum von $W_0^{1,p}(\Omega)$ 8 Punkte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes und beschränktes Gebiet, $1 < p < \infty$ und p' der konjugierte Exponent. Betrachten Sie den Sobolevraum $W_0^{1,p}(\Omega)$ mit der Norm $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ und beweisen Sie: es gilt $F \in (W_0^{1,p}(\Omega))^*$ genau dann, wenn Funktionen $f_i \in L^{p'}(\Omega)$, $i = 0, ..., n$, existieren, so dass für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gilt

$$\langle F, u\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega f_0 u \, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega f_i \partial_i u \, dx.$$

Tipp: Betrachten Sie den kanonisch normierten Raum $E := (L^p(\Omega))^{1+n}$ und die Abbildung $\Pi : W_0^{1,p}(\Omega) \to E$, $u \mapsto (u, \partial_1 u, ..., \partial_n u)$.