Abteilung für Angewandte Mathematik 12.12.2011
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2011/12 — Woche 7

Abgabe: Montag, den 19. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: untere Schranke für den Exponent **8 Punkte**

Betrachten Sie auf einem glatt berandeten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ noch einmal die Gleichung

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + su &= f \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Hierbei sei wie in der Vorlesung $1 < p < \infty$, $f \in L^{p'}(\Omega)$ und $s \geq 0$. Zeigen Sie, dass man auf die untere Schranke $p \geq \frac{2d}{d+2}$ im Existenzbeweis verzichten kann, wenn man die Gleichung als Operatorgleichung auf $X := W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ formuliert.

Aufgabe 2: inhomogene Randwerte **6 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand und $1 < p < \infty$. Zeigen Sie, dass es für $f \in L^{p'}(\Omega)$ und $g \in W^{1,p}(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung des Problems

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= f \text{ in } \Omega \\ u &= g \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

gibt. **Tipp:** Transformieren sie die Gleichung auf homogene Randwerte und betrachten sie den geshifteten Operator $A_g(\cdot) := A(\cdot + g)$.

Aufgabe 3: Bedingung (M) **6 Punkte**

Sei X ein reller, reflexiver und separabler Banachraum und $A : X \to X^*$ sei definiert durch $Au := B(u, u)$, wobei $B : X \times X \to X^*$ den folgenden Bedingungen genüge:

1. $B(u, \cdot)$ ist monoton und hemistetig für festes $u \in X$.

2. $B(\cdot, v)$ ist für festes $v \in X$ schwach stetig, d.h. $u_n \rightharpoonup u$ in X impliziert $B(u_n, v) \rightharpoonup B(u, v)$ in X^*.

3. Die Funktion $u \mapsto \langle B(u, v), u\rangle$ ist für festes $v \in X$ schwach unterhalbstetig, d.h. $u_n \rightharpoonup u$ in X impliziert $\langle B(u, v), u\rangle \leq \liminf_{n\to\infty}\langle B(u_n, v), u_n\rangle$.

Zeigen Sie, dass dann A die Bedingung (M) erfüllt.