

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2011/12 — Woche 9

Abgabe: Montag, den 16. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Dichtheit glatter Funktionen

6 Punkte

Sei V ein Banachraum, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes und beschränktes Intervall und $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie, dass die Mengen $C^\infty(\bar{I}, V)$ und $C_0^\infty(I, V)$ dicht in $L^p(I, X)$ sind. **Tipp:** Glätten Sie durch Faltung und verwenden Sie Blatt 5.

Aufgabe 2: Partielle Integration

8 Punkte

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes und beschränktes Intervall, (V, H, V^*) ein Gelfand-Tripel, $1 < p < \infty$ und p' der konjugierte Exponent. Ferner sei der Raum $W := W^{1,(p,p')}(I, V, V^*)$ der in Woche 8 definierte verallgemeinerte Sobolevraum. Sie dürfen für diese Aufgabe ohne Beweis verwenden, dass die Menge $C^\infty(\bar{I}, V)$ dicht im Raum W liegt.

1. Zeigen Sie: Für $u \in C^\infty(\bar{I}, V)$, $u \neq 0$ ist die Funktion $t \mapsto \|u(t)\|_H^2$ klassisch differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 = 2(u'(t), u(t))_H = 2\langle u'(t), u(t) \rangle_V. \quad (1)$$

2. Folgern Sie aus 1, dass für alle $u \in C^\infty(\bar{I}, V)$ die Abschätzung

$$\|u\|_{C(\bar{I}, H)} \leq c \|u\|_W$$

mit einer von u unabhängigen Konstante $c > 0$ gilt.

3. Zeigen Sie anschließend die stetige Einbettung

$$W \hookrightarrow C(\bar{I}, H).$$

4. Zeigen Sie: Für alle $u, v \in W$ und alle $s, t \in \bar{I}$ gilt

$$\int_s^t \left\langle \frac{du}{dt}(\tau), v(\tau) \right\rangle_V d\tau = (u(t), v(t))_H - (u(s), v(s))_H - \int_s^t \left\langle \frac{dv}{dt}(\tau), u(\tau) \right\rangle_V d\tau.$$

Aufgabe 3: Schwache Konvergenz

6 Punkte

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $1 \leq p < \infty$. Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ eine Folge, für die $u_n \rightharpoonup u$ in $L^p(\Omega)$ und $u_n(x) \rightarrow v(x)$ fast überall in Ω gilt. Zeigen Sie, dass dann auch $u = v$ gilt.
2. Sei $1 < p < \infty$ und $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt in $L^p(\Omega)$. Zeigen Sie: Falls $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fast überall in Ω gegen eine Funktion v konvergiert, so gilt auch $u_n \rightharpoonup v$ in $L^p(\Omega)$.