Übung zum Praktikum zu Theorie und Numerik für PDgl 1

WS 2007/08 – Blatt 1 (Abgabe 6.11.07)

Aufgabe 1:

(i) Gegeben sei die folgende Makrotriangulierung des Gebiets $[-1,1]^2$:

```
VERTEX
-1 -1     # Knoten Null
 1 -1
 1  1
-1  1
-0.1 -1
1 -0.8
#
SIMPLEX
4 3 0     # Dreieck Null
5 4 1
3 5 2
5 3 4
#
```

Für alle Dreiecke sei der Verfeinerungsknoten gegenüber der längsten Kante.

Zeichnen Sie die nötigen Schritte, um eine konforme Verfeinerung des nullten Elements mittels Bisektion zu erreichen; markieren Sie dabei die Verfeinerungsknoten aller Dreiecke. Wie sieht die hierarchische Gitterstruktur am Ende dieser Prozedur aus?

(ii) Geben Sie eine Triangulierung des Gebiets G mit einspringender Ecke an: $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| + |y| < 1 \text{ und } x < 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| + |y| < 1 \text{ und } x > 0, y > 0\}$

Aufgabe 2: Als Referenzdreieck oder Einheitssimplex $\widehat{T}$ bezeichnet man die konvexe Hülle der Einheitsvektoren. Sei T ein beliebiges nicht entartetes Dreieck mit Eckpunkten $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$.

(i) Die Referenzabbildung F_T ist eine affin lineare Abbildung von $\widehat{T}$ auf T. Geben Sie diese konkret an und zeigen Sie, dass $|\mathrm{det} DF_T| = \frac{|T|}{|\widehat{T}|}$.

(ii) Sei $\widehat{\varphi}$ eine glatte Funktion von $\widehat{T}$ nach $\mathbb{R}$. Diese induziert eine Funktion auf T durch $\varphi(x) = \widehat{\varphi}(F_T^{-1}(x))$. Auf $\widehat{T}$ definieren wir eine Quadraturformel der Form $\widehat{Q}(\widehat{\varphi}) := \sum_{i=1}^q \omega_i \widehat{\varphi}(\lambda_i)$ auf $\widehat{T}$, welche exakt sei auf einem Funktionenraum $\widehat{V}$, d.h. für alle $\widehat{\varphi} \in \widehat{V}$ gilt $\widehat{Q}(\widehat{\varphi}) = \int_{\widehat{T}} \widehat{\varphi}(\lambda)\, d\lambda$. Konstruieren Sie eine Quadratur Q auf T, welche exakt ist für alle $\varphi = \widehat{\varphi} \circ F_T$ mit $\widehat{\varphi} \in \widehat{V}$. Geben Sie die zugehörigen Gewichte und Stützstellen an.

Aufgabe 3: Seien $\widehat{T}$ und T wie oben. Für $r \in \mathbb{N}$ sei $P_r(\widehat{T})$ die Menge der Polynome vom Grad kleiner gleich r auf $\widehat{T}$. Einer Menge von Punkten $L := \{p_j \ : \ j = 1, \ldots, N\} \subset \widehat{T}$ wird eine Menge von Funktionen $\Phi(L) := \{\widehat{\varphi}_i \ : \ i = 1, \ldots, N\} \subset P_r(\widehat{T})$ mit $\widehat{\varphi}_i(p_j) = \delta_{ij}$ für $1 \leq i, j \leq N$ zugeordnet.

(i) Geben Sie zu $L = \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$ die Funktionen $\Phi(L)$ in $P_1(\widehat{T})$ an und zeigen Sie, dass diese eine Basis von $P_1(\widehat{T})$ bilden.

(ii) Nun zeigen Sie dasselbe für $P_2(\widehat{T})$ und $L = \{(0,0), (1,0), (0,1), (\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$.

(iii) Gibt es auch Funktionen $\Phi(L) \subset P_2(\widehat{T})$ zu $L = \{(0.1, 0), (0.9, 0), (0, 0.1), (0, 0.9), (0.1, 0.9), (0.9, 0.1)\}$?