

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen I  
Universität Freiburg

Gerhard Dziuk

Vorlesungsskript Wintersemester 2006/2007

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Der Laplace-Operator</b>	<b>3</b>
1.1	Der Gaußsche Integralsatz und die Greenschen Formeln . . . . .	3
1.2	Die Darstellungsformel . . . . .	5
1.3	Das Poissonintegral . . . . .	9
1.4	Das Maximumprinzip für harmonische Funktionen . . . . .	13
1.5	Das Newtonpotential . . . . .	14
1.6	Diskretisierung am Beispiel eines Differenzenverfahrens . . . . .	18
1.7	Das Dirichletsche Prinzip und warum man Sobolevräume braucht . . . . .	23
1.8	Sobolevräume . . . . .	25
1.9	Der Laplace-Operator auf Sobolevräumen . . . . .	30
<b>2</b>	<b>Finite Elemente</b>	<b>33</b>
2.1	Das Ritz–Galerkin–Verfahren . . . . .	33
2.2	Simplexe . . . . .	35
2.3	Simpliziale Lagrange–Elemente . . . . .	38
2.4	Poincaréungleichungen . . . . .	44
2.5	Interpolationsabschätzungen . . . . .	47
2.6	Fehlerabschätzung für die Poissongleichung . . . . .	51
2.7	Sobolevsche Einbettungssätze . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung</b>	<b>57</b>
3.1	Der funktionalanalytische Rahmen . . . . .	57
3.2	Schwache Lösungen . . . . .	60
3.3	Diskrete Lösungen und Fehlerabschätzung . . . . .	62
3.4	Randwerte . . . . .	64
3.5	Monotone elliptische Probleme . . . . .	66
3.6	Das Neumann–Problem . . . . .	70
3.7	A-Priori-Abschätzungen . . . . .	74

# 1 Der Laplace-Operator

## 1.1 Der Gaußsche Integralsatz und die Greenschen Formeln

Zunächst legen wir fest, was unsere Mindestanforderungen an das Gebiet  $G$  sind, in dem wir die Poissongleichung lösen wollen. Wir nennen solche Gebiete Normalgebiete. Es sind Gebiete, deren Rand aus gutartigen Hyperflächenstücken zusammengesetzt ist. Erst aber sagen wir, was ein Flächenstück und ein Oberflächenintegral sind. Zur Erinnerung: ein Gebiet ist eine offene wegweise zusammenhängende Menge.

**Definition 1.1** Eine Menge  $F \subset \mathbb{R}^n$  heißt *reguläres Hyperflächenstück* der Klasse  $C^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), wenn sie sich in der Form  $F = x(T)$ ,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \\ &\vdots \\ x_n &= x_n(t_1, \dots, t_{n-1}), \end{aligned}$$

mit  $t = (t_1, \dots, t_{n-1}) \in T \subset \mathbb{R}^{n-1}$  darstellen läßt. Dabei ist  $T$  ein beschränktes Gebiet im  $\mathbb{R}^{n-1}$ , und es ist  $x \in C^0(\overline{T}, \mathbb{R}^n) \cap C^k(T, \mathbb{R}^n)$ . Außerdem ist  $x : \overline{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$  injektiv mit

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{pmatrix} = n - 1.$$

Mit  $D_i, i = 1, \dots, n$  bezeichnen wir die Funktionen

$$D_i = (-1)^{n+i} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_{i-1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_{i-1}}{\partial t_{n-1}} \\ \frac{\partial x_{i+1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_{i+1}}{\partial t_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Die Vektoren  $\nu = \pm(\nu_1, \dots, \nu_n)$

$$\nu_i = \frac{D_i}{\sqrt{D_1^2 + \cdots + D_n^2}} \quad (i = 1, \dots, n)$$

heißen die zu  $F$  im Punkt  $x = x(t)$  gehörenden *Normalen*. Für  $f \in C^0(F)$  heißt

$$\int_F f(x) \, do(x) = \int_T f(x(t)) \sqrt{D_1^2(t) + \cdots + D_n^2(t)} \, dt$$

*Oberflächenintegral* von  $f$  über  $F$ , wenn

$$\int_T |f(x(t))| \sqrt{D_1^2(t) + \cdots + D_n^2(t)} \, dt < \infty$$

endlich ist.

**Definition 1.2** Ein beschränktes Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  heißt *Normalgebiet*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Zu jedem Randpunkt  $x' \in \partial G$  gibt es eine Folge  $(x^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ ,  $x^{(p)} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) mit  $x^{(p)} \rightarrow x'$  ( $p \rightarrow \infty$ ).

2.  $\partial G = \overline{F_1} \cup \dots \cup \overline{F_N}$  mit regulären Hyperflächenstücken  $F_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) der Klasse  $C^1$  und es gilt:

$$\overline{F_i} \cap \overline{F_j} = \partial F_i \cap \partial F_j \quad (i \neq j).$$

Dabei ist  $\partial F := \overline{F} \setminus F$ . Außerdem existiere  $\int_{F_j} do$  ( $j = 1, \dots, N$ ).

3. Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es endlich viele Kugeln  $K_j = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x^{(j)}| \leq \rho_j\}$  mit  $x^{(j)} \in \partial F_1 \cup \dots \cup \partial F_N$ ,  $\rho_j > 0$ , ( $j = 1, \dots, q = q(\varepsilon)$ ), so daß

$$\partial F_1 \cup \dots \cup \partial F_N \subset \bigcup_{j=1}^q K_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^q \rho_j^{n-1} \leq \varepsilon.$$

Für ein Normalgebiet  $G$  sei das Oberflächenintegral definiert als

$$\int_{\partial G} f do := \sum_{j=1}^N \int_{F_j} f do.$$

Ein beschränktes Gebiet, das diese Bedingung nicht erfüllt ist zum Beispiel eine Kugel, aus der ein Punkt herausgenommen wurde,  $G = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x| < 1\}$ .

Wir sind nun in der Lage, den Gaußschen Integralsatz für Normalgebiete zu formulieren. Er besagt, dass das Volumenintegral über eine Divergenz,

$$\operatorname{div} f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j},$$

sich als Oberflächenintegral schreiben lässt. Für uns ist dies besonders wichtig, weil ja

$$\Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$$

gilt.

**Satz 1.3 (Gaußscher Integralsatz)** *Es sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Normalgebiet mit äußerer Normale  $\nu$ . Ferner sei  $f = (f_1, \dots, f_n) \in (C^0(\overline{G}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(G, \mathbb{R}^n))$  und  $\int_G |\operatorname{div} f| dx < \infty$ . Dann gilt:*

$$\int_G \operatorname{div} f(x) dx = \int_{\partial G} f(x) \cdot \nu(x) do(x). \quad (1.1)$$

Der Gaußsche Integralsatz ist die Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Er liefert eine Formel für die partielle Integration in höherer Raumdimension. Setzen wir in (1.1) die spezielle Funktion  $f = (0, \dots, 0, u, 0, \dots, 0)$  mit  $u$  an der  $i$ -ten Stelle ein, so erhalten wir ein entsprechendes Resultat.

**Folgerung 1.4** *Unter den Voraussetzungen von Satz 1.3 gilt für eine (skalare) Funktion  $u \in C^0(\overline{G}) \cap C^1(G)$ , mit  $\int_G \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| dx < \infty$ :*

$$\int_G \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial G} u(x) \nu_i(x) do(x).$$

Wenden wir den Gaußschen Integralsatz auf den Gradienten einer skalaren Funktion an, so erscheint der Laplace-Operator. Das führt zu den Greenschen Formeln, die wir im folgenden Satz notieren.

**Satz 1.5 (Greensche Formeln)** *Es sei  $G$  ein Normalgebiet. Für  $u, v \in C^1(\bar{G})$ ,  $v \in C^2(G)$  und  $\int_G |\Delta v| dx < \infty$  gilt die erste Greensche Formel*

$$\int_G u(x) \Delta v(x) dx = \int_{\partial G} u(x) \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) do(x) - \int_G \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx. \tag{1.2}$$

*Ist zusätzlich  $u \in C^2(G)$  und  $\int_G |\Delta u| dx < \infty$ , so gilt die zweite Greensche Formel*

$$\int_G u(x) \Delta v(x) - v(x) \Delta u(x) dx = \int_{\partial G} u(x) \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) - v(x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) do(x). \tag{1.3}$$

*Beweis.* Die zweite Greensche Formel folgt offensichtlich sofort aus der ersten. Die erste Greensche Formel folgt aus dem Gaußschen Integralsatz, wenn wir ihn auf das Vektorfeld

$$f = \left( u \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, u \frac{\partial v}{\partial x_n} \right)$$

anwenden und beachten, dass gilt

$$\operatorname{div} f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} + u \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} = \nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v.$$

Ausserdem ist aus der Analysis bekannt, dass die partielle Ableitung in Richtung des Normalenvektors,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_j,$$

als das euklidische Skalarprodukt aus dem Gradienten und dem Normalenvektor gegeben ist. □

## 1.2 Die Darstellungsformel

Die zweite Greensche Formel (1.3) verwenden wir, um eine Lösungsformel für das Randwertproblem für die Poissongleichung zu finden. Nehmen wir für den Moment an, daß  $-\Delta u = f$  in  $G$  gilt und außerdem  $u = g$  auf  $\partial G$  ist, wobei  $g$  und  $f$  bekannt sind. Dann liefert (1.3) unter geeigneten Voraussetzungen die Gleichung

$$\int_G u \Delta v dx = - \int_G f v dx + \int_{\partial G} g \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} do.$$

Wenn wir die Funktion  $v$  so wählen, daß sie auf dem Gebietsrand  $\partial G$  verschwindet, so haben wir fast eine Formel für „die Lösung“  $u$  des Problems  $-\Delta u = f$  in  $G$ ,  $u = g$  auf  $\partial G$ .

$$\int_G u \Delta v dx = - \int_G f v dx + \int_{\partial G} g \frac{\partial v}{\partial \nu} do.$$

Wir versuchen nun, ein  $v$  zu finden, daß für festes  $x_0 \in G$  zusätzlich einer Bedingung der Art

$$\int_G u \Delta v dx = u(x_0) \tag{1.4}$$

genügt. Das geht naturgemäß im allgemeinen nur mit einer Funktion  $v$ , die eine Singularität im Punkt  $x_0$  besitzt.

**Definition 1.6** Eine Funktion  $u$  heißt in der offenen Menge  $G \subset \mathbb{R}^n$  *harmonisch*, wenn  $u \in C^2(G)$  ist und  $\Delta u = 0$  in  $G$  gilt.

Wir suchen zunächst harmonische Funktionen, die von der Form

$$u(x) = v(|x|)$$

sind, also nur vom Abstand des Punktes  $x$  zum festen Ursprung abhängen. Dann gilt für  $x \neq 0$ :

$$u_{x_i}(x) = v'(|x|) \frac{x_i}{|x|}, \quad u_{x_i x_i}(x) = v''(|x|) \frac{x_i^2}{|x|^2} + v'(|x|) \frac{1}{|x|} \left(1 - \frac{x_i^2}{|x|^2}\right)$$

und damit

$$\Delta u(x) = v''(|x|) + v'(|x|) \frac{n-1}{|x|}. \quad (1.5)$$

Also ist  $\Delta u = 0$  genau dann, wenn

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0 \quad (r \neq 0). \quad (1.6)$$

Wir lösen diese lineare gewöhnliche Differentialgleichung. Dazu setzen wir  $w(r) := v'(r)$  und lösen

$$w'(r) + \frac{n-1}{r} w(r) = 0.$$

Diese Gleichung ist für  $r > 0$  äquivalent zu

$$(r^{n-1} w(r))' = 0,$$

also erhalten wir

$$v'(r) = w(r) = c_1 r^{1-n}$$

und damit in Abhängigkeit von der Raumdimension  $n$  als Lösungen von (1.6) mit beliebigen Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} v(r) &= c_1 r^{2-n} + c_2 & (n \neq 2), \\ v(r) &= c_1 \log r + c_2 & (n = 2). \end{aligned}$$

Damit haben wir folgendes Lemma bewiesen.

**Lemma 1.7** In  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  löst die Singularitätenfunktion

$$s_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & (n = 2) \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} |x|^{2-n} & (n \neq 2) \end{cases}$$

die Potentialgleichung  $\Delta s_n = 0$ , ist also in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  harmonisch.

Wir werden im folgenden häufig mit Polarkoordinaten im  $\mathbb{R}^n$  arbeiten. Dazu formulieren wir die Transformationsformel auf Polarkoordinaten für Integrale im  $\mathbb{R}^n$ . Der Beweis ist eine Übungsaufgabe.

**Hilfssatz 1.8** Es sei  $B_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < R\}$  die Kugel um  $x_0$  mit Radius  $R > 0$  und  $S^{n-1} = \partial B_1(0)$  die Einheitskugel im  $n$ -dimensionalen Raum. Falls die auftretenden Integrale existieren, dann gilt mit  $r = |x - x_0|$ ,  $\xi = (x - x_0)/|x - x_0|$ :

$$\begin{aligned} \int_{B_R(x_0)} f(x) dx &= \int_0^R \left( \int_{S^{n-1}} f(x_0 + r\xi) d\omega(\xi) \right) r^{n-1} dr, \\ \int_{\partial B_R(x_0)} f(x) d\omega_x &= \int_{S^{n-1}} f(x_0 + R\xi) d\omega(\xi) R^{n-1}. \end{aligned}$$

Wir konstruieren nun Funktionen der Art, wie wir sie zu Beginn dieses Abschnitts gewünscht hatten (1.4). Solche Funktionen nennen wir Grundlösungen. Sie sind aus der Singularitätenfunktion und einem glatten Anteil zusammengesetzt.

**Definition 1.9** Es sei  $\omega_n = |S^{n-1}|$  der Flächeninhalt der Einheitssphäre im  $\mathbb{R}^n$  und  $\omega_1 = 1$ . Eine Funktion

$$\phi(y, x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |y - x| + \varphi(y, x) & (n = 2) \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} |y - x|^{2-n} + \varphi(y, x) & (n \neq 2) \end{cases}$$

heißt *Grundlösung* von  $\Delta u = 0$  zum Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$ , falls für festes  $x \in G$ ,  $\varphi(\cdot, x) \in C^1(\overline{G})$  ist und  $\varphi(\cdot, x)$  in  $G$  harmonisch ist.

Wir werden im folgenden eine solche Funktion immer Grundlösung nennen, ohne auf die zugehörige Differentialgleichung zu verweisen. Die Wahl der Konstanten in der Definition wird noch deutlich werden.

**Satz 1.10** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Normalgebiet und sei  $u \in C^2(\overline{G})$ . Dann gilt für  $x \in G$  die Darstellungsformel

$$u(x) = \int_{\partial G} \phi(y, x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y, x) do(y) - \int_G \phi(y, x) \Delta u(y) dy,$$

wobei  $\phi$  eine beliebige Grundlösung (von  $\Delta v = 0$  zu  $G$ ) ist.  $\nu$  bezeichnet die äußere Normale an  $\partial G$  im Punkt  $y \in \partial G$ .

*Beweis.* Wir beweisen die Darstellungsformel des Satzes für festes  $x_0 \in G$  und  $n \neq 2$ . Dazu sei  $\varepsilon > 0$  so klein, dass  $\overline{B_\varepsilon(x_0)} \subset G$ . Das Gebiet, aus dem diese kleine Kugel herausgebohrt ist, bezeichnen wir mit  $G_\varepsilon := G \setminus \overline{B_\varepsilon(x_0)}$ . Die zweite Greensche Formel (1.3) liefert unter den Voraussetzungen  $u, v \in C^1(\overline{G_\varepsilon})$ ,  $u, v \in C^2(G_\varepsilon)$ ,  $\int_G |\Delta u| dx < \infty$ ,  $\int_{G_\varepsilon} |\Delta v| dx < \infty$ , dass gilt

$$\int_{G_\varepsilon} u \Delta v - v \Delta u dx = \int_{\partial G_\varepsilon} u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} do.$$

Nach Voraussetzung ist  $u \in C^2(\overline{G})$ . Für  $v$  wählen wir  $v(x) = \phi(x, x_0)$ . Für  $n \neq 2$  ist also

$$\int_{G_\varepsilon} u(x) \Delta \phi(x, x_0) - \phi(x, x_0) \Delta u(x) dx = \int_{\partial G_\varepsilon} u(x) \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x, x_0) - \phi(x, x_0) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) do(x),$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} & \underbrace{- \int_{G_\varepsilon} \phi(x, x_0) \Delta u(x) dx}_{(1)} + \underbrace{\int_{\partial G} \phi(x, x_0) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x) \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x, x_0) do(x)}_{(2)} \\ & = \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \phi(x, x_0) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x) \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x, x_0) do(x)}_{(3)} + \underbrace{\int_{\partial G} \phi(x, x_0) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x) \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x, x_0) do(x)}_{(4)}. \end{aligned}$$

Jetzt wollen wir in allen vier Termen  $\varepsilon \rightarrow 0$  gehen lassen. Das Integral (1) existiert für  $\varepsilon \rightarrow 0$  als uneigentliches Riemann-Integral,

$$\int_{B_\varepsilon(x_0)} |\phi(x, x_0)| |\Delta u(x)| dx \leq \max_{\overline{G}} |\Delta u| \int_{B_\varepsilon(x_0)} |\phi(x, x_0)| dx,$$

denn für  $n \neq 2$  haben wir nach Definition der Grundlösung

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon(x_0)} |\phi(x, x_0)| dx &\leq \int_{B_\varepsilon(x_0)} \frac{1}{|n-2|\omega_n} |x-x_0|^{2-n} dx + \int_{B_\varepsilon(x_0)} |\varphi(x, x_0)| dx \\ &\leq \frac{1}{|n-2|\omega_n} \int_0^\varepsilon \int_{S^{n-1}} r^{2-n} r^{n-1} d\sigma(\xi) dr + \max_{x \in \bar{G}} |\varphi(x, x_0)| \int_{B_\varepsilon(x_0)} 1 dx \\ &\leq \frac{\omega_n}{|n-2|\omega_n} \int_0^\varepsilon r dr + \max_{x \in \bar{G}} |\varphi(x, x_0)| \omega_n \int_0^\varepsilon r^{n-1} dr \\ &= \frac{1}{2|n-2|} \varepsilon^2 + \max_{x \in \bar{G}} |\varphi| \frac{\omega_n}{n} \varepsilon^n \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Also folgt:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{G_\varepsilon} \phi(x, x_0) \Delta u(x) dx = \int_G \phi(x, x_0) \Delta u(x) dx.$$

Das Integral (2) existiert, da  $x_0 \in G$  und  $x \in \partial G$  ist. Auch das dritte Integral verschwindet für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Es ist nämlich

$$|(3)| = \left| \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \phi(x, x_0) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) d\sigma(x) \right| \leq \max_{\bar{G}} |\nabla u| \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} |\phi(x, x_0)| d\sigma(x)$$

und wegen

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} |x-x_0|^{2-n} d\sigma(x) = \varepsilon^{2-n} \varepsilon^{n-1} \omega_n = \omega_n \varepsilon \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

folgt dann

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \phi(x, x_0) \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma(x) = 0.$$

Der eigentlich wichtige und von uns erwünschte Anteil ist im Integral (4) enthalten. Es sollte uns  $-u(x_0)$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  liefern.

$$(4) = \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} u(x) \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x, x_0) d\sigma(x) = \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} u(x) \left\{ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{\partial}{\partial \nu} (|x-x_0|^{2-n}) + \frac{\partial}{\partial \nu} \varphi(x, x_0) \right\} d\sigma(x).$$

Offensichtlich ist

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(x, x_0) d\sigma(x) = 0.$$

Wir berechnen den ersten Anteil von (4) explizit. Wir kennen die Normale,  $\nu(x) = (x-x_0)/|x-x_0|$  und können demnach so rechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} (|x-x_0|^{2-n}) &= \sum_{i=1}^n \nu_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} (|x-x_0|^{2-n}) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i - x_{0i}}{|x-x_0|} (2-n) |x-x_0|^{1-n} \frac{x_i - x_{0i}}{|x-x_0|} \\ &= (2-n) |x-x_0|^{1-n} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{0i})^2}{|x-x_0|^2} = (2-n) |x-x_0|^{1-n}. \end{aligned}$$

Also folgt insgesamt

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} u(x) \frac{\partial}{\partial \nu} (|x-x_0|^{2-n}) d\sigma(x) &= -\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} u(x) \varepsilon^{1-n} d\sigma(x) \\ &= -\frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} u(x_0 + \varepsilon \xi) \varepsilon^{1-n} \varepsilon^{n-1} d\sigma(\xi) = -\frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} u(x_0 + \varepsilon \xi) d\sigma(\xi) \rightarrow -u(x_0) \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \end{aligned}$$

da  $u$  stetig ist. Wir fassen die Resultate für die Anteile (1), (2), (3) und (4) für  $\varepsilon \rightarrow 0$  zusammen und erhalten damit wie behauptet die Darstellungsformel

$$-\int_G \phi(x, x_0) \Delta u(x) dx + \int_{\partial G} \phi(x, x_0) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x) \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x, x_0) d\sigma(x) = u(x_0).$$

□

Ist die Grundlösung  $\phi$  so gewählt, dass  $\phi(y, x) = 0$  für  $x \in G$  und  $y \in \partial G$ , so folgt:

$$u(x) = -\int_G \phi(y, x) \Delta u(y) dy - \int_{\partial G} u(y) \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y, x) d\sigma(y)$$

d. h. wir haben eine Kandidatin für eine Lösung des Randwertproblems

$$-\Delta u = f \text{ in } G, \quad u = g \text{ auf } \partial G$$

zu gegebenen  $f \in C^0(\overline{G})$ ,  $g \in C^0(\partial G)$ , nämlich

$$u(x) = \int_G \phi(y, x) f(y) dy - \int_{\partial G} g(y) \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y, x) d\sigma(y).$$

Zwar wird es nicht ganz so einfach sein, denn die Stetigkeit von  $f$  reicht nicht aus, aber der Ansatz für eine Lösung ist richtig. Wir geben Grundlösungen mit den gewünschten Eigenschaften einen eigenen Namen.

**Definition 1.11**  $\phi_G(y, x)$  ist eine zum Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  gehörende *Greensche Funktion*, wenn  $\phi_G$  Grundlösung gemäß Definition 1.9 ist und außerdem der Bedingung  $\phi_G(y, x) = 0$  für  $y \in \partial G$ ,  $x \in G$  genügt.

### 1.3 Das Poissonintegral

Für geometrisch besonders einfache Gebiete lässt sich eine Greensche Funktion explizit angeben. Dies gilt z. B. für die Greensche Funktion einer Kugel  $B_R(0)$  im  $\mathbb{R}^n$ .

**Satz 1.12** Eine Greensche Funktion der Kugel  $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$  ist im Fall  $n \neq 2$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \phi(y, x) &= \frac{1}{(n-2)w_n} \left( |y-x|^{2-n} - \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} \left| y - \frac{R^2}{|x|^2} x \right|^{2-n} \right) \quad (x \neq 0), \\ \phi(y, 0) &= \frac{1}{(n-2)w_n} \left( |y|^{2-n} - R^{2-n} \right). \end{aligned}$$

In zwei Raumdimensionen ( $n = 2$ ) ist eine Greensche Funktion für  $B_R(0)$  durch

$$\begin{aligned} \phi(y, x) &= -\frac{1}{2\pi} \left( \log |y-x| - \log \left| \frac{|x|}{R} y - \frac{R}{|x|} x \right| \right) \quad (x \neq 0), \\ \phi(y, 0) &= -\frac{1}{2\pi} \left( \log |y| - \log R \right) \end{aligned}$$

gegeben. In jedem Fall ist  $\phi(y, x) = \phi(x, y)$ .

*Beweis.* Wir betrachten nur den Fall  $n \neq 2$ . Offensichtlich hat  $\phi$  die verlangte Form

$$\phi(y, x) = s_n(x-y) + \varphi(y, x)$$

mit

$$\begin{aligned} \varphi(y, x) &= -\frac{1}{(n-2)w_n} \left( \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} \left| y - \frac{R^2}{|x|^2} x \right|^{2-n} \right) \quad (x \neq 0), \\ \varphi(y, 0) &= -\frac{1}{(n-2)w_n} R^{2-n}. \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist  $\phi(y, x) = 0$  für  $|y| = R$  und  $|x| < R$ .  $\phi(\cdot, x)$  ist für festes  $x \in B_R(0)$  aus  $C^1(\overline{B_R(0)})$  und in  $B_R(0)$  harmonisch, denn für  $0 < |x| < R$  und  $|y| \leq R$  hat man

$$\left| y - \frac{R^2}{|x|^2} x \right| \geq \frac{R^2}{|x|} - |y| > 0.$$

Der Fall  $x = 0$  ist trivial. □

Wir vermuten nun, dass mit dieser Greenschen Funktion für die Kugel durch

$$u(x) = - \int_{\partial B_R(0)} g(y) \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y, x) d\sigma(y)$$

eine Lösung von  $\Delta u = 0$  in  $B_R(0)$  mit Randwerten  $u = g$  auf  $\partial B_R(0)$  gegeben ist. Dazu rechnen wir  $\frac{\partial \phi}{\partial \nu(y)}(y, x)$  aus. Für  $(n \geq 3)$  und  $y \neq x$  ist:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y_j}(y, x) = -\frac{1}{w_n} \left( \frac{y_j - x_j}{|y - x|^n} - \left( \frac{R}{|x|} \right)^{n-2} \frac{y_j - \frac{R^2}{|x|^2} x_j}{\left| y - \frac{R^2}{|x|^2} x \right|^n} \right).$$

Für  $|y| = R$  folgt für die Ableitung in Richtung der Normalen  $\nu = y/R$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y, x) &= \sum_{j=1}^n \nu_j(y) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y_j}(y, x) \\ &= - \sum_{j=1}^n \frac{y_j}{R} \frac{1}{w_n} \left\{ \frac{y_j - x_j}{|y - x|^n} - \left( \frac{R}{|x|} \right)^{n-2} \frac{y_j - \frac{R^2}{|x|^2} x_j}{\left| y - \frac{R^2}{|x|^2} x \right|^n} \right\} \\ &= - \frac{1}{R w_n} \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{y_j^2 - x_j y_j}{|y - x|^n} - \left( \frac{R}{|x|} \right)^{n-2} \frac{y_j^2 - \frac{R^2}{|x|^2} x_j y_j}{\left| y - \frac{R^2}{|x|^2} x \right|^n} \right\} \\ &= - \frac{1}{R w_n} \left\{ \frac{|y|^2 - x \cdot y}{|y - x|^n} - \left( \frac{R}{|x|} \right)^{n-2} \frac{|y|^2 - \frac{R^2}{|x|^2} x \cdot y}{\left| y - \frac{R^2}{|x|^2} x \right|^n} \right\} \end{aligned}$$

Nun ist  $\phi(y, x) = 0$  für  $|x| < R, |y| = R$ , d. h. dass dann gilt:  $|y - x| = \left( \frac{R}{|x|} \right)^{-1} \left| y - \frac{R^2}{|x|^2} x \right|$ . Also erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y, x) &= - \frac{1}{R w_n} \left\{ \frac{R^2 - x \cdot y}{|y - x|^n} - \left( \frac{R}{|x|} \right)^{n-2} \frac{R^2 - \frac{R^2}{|x|^2} x \cdot y}{\left( \frac{R}{|x|} \right)^n |y - x|^n} \right\} \\ &= - \frac{1}{R w_n} \frac{R^2 - x \cdot y - \frac{|x|^2}{R^2} \left( R^2 - \frac{R^2}{|x|^2} x \cdot y \right)}{|y - x|^n} \\ &= - \frac{1}{R w_n} \frac{R^2 - |x|^2}{|y - x|^n}. \end{aligned}$$

Wir fassen diese Rechnungen im folgenden Satz zusammen.

**Satz 1.13** Sei  $u \in C^0(\overline{B_R(0)}) \cap C^2(B_R(0))$  eine Lösung von

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } B_R(0), \quad u = g \quad \text{auf } \partial B_R(0).$$

Dann gilt für  $x \in B_R(0)$  die Formel

$$u(x) = \frac{1}{R w_n} \int_{\partial B_R(0)} \frac{R^2 - |x|^2}{|y - x|^n} g(y) d\sigma(y). \tag{1.7}$$

*Beweis.* Dies ist eine Konsequenz aus den obigen Rechnungen und Satz 1.10. Nur wurde in Satz 1.10  $u \in C^2(\overline{B_R(0)})$  vorausgesetzt. Jedenfalls ist nach der jetzigen Voraussetzung  $u \in C^2(\overline{B_{R-\varepsilon}(0)})$  für jedes kleine positive  $\varepsilon$ . Also erhalten wir für  $x \in B_{R-\varepsilon}(0)$

$$u(x) = \frac{1}{(R-\varepsilon)w_n} \int_{\partial B_{R-\varepsilon}(0)} \frac{(R-\varepsilon)^2 - |x|^2}{|y-x|^n} u(y) \, do(y).$$

Führe dann den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  aus und erhalte die Behauptung des Satzes. □

Eine wesentliche Konsequenz des obigen Satzes ist die, dass wir damit gezeigt haben, dass eine in der Kugel harmonische Funktion, die stetig bis zum Rand ist, vollständig durch ihre Randwerte festgelegt ist.

Bisher haben wir bewiesen, dass die Formel (1.7) notwendig für eine Lösung des Randwertproblems  $u \in C^0(\overline{B_R(0)}) \cap C^2(B_R(0))$ ,

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } B_R(0), \quad u = g \quad \text{auf } \partial B_R(0)$$

ist. Wir sind aber am umgekehrten Schluss interessiert. Das ist die Aussage des folgenden Satzes.

**Satz 1.14 (Poisson-Integral)** Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $g \in C^0(\partial B_R(x_0))$ . Dann ist durch

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{Rw_n} \int_{\partial B_R(x_0)} \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{|y - x|^n} g(y) \, do(y) & (x \in B_R(x_0)) \\ g(x) & (x \in \partial B_R(x_0)) \end{cases}$$

die einzige Lösung  $u \in C^0(\overline{B_R(x_0)}) \cap C^2(B_R(x_0))$  des Randwertproblems

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } B_R(x_0), \quad u = g \quad \text{auf } \partial B_R(x_0)$$

gegeben.

Die Funktion

$$P_R(x, y) := \frac{1}{Rw_n} \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y - x|^n} \quad (x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y)$$

heißt Poissonscher Integralkern.

*Beweis.* Die Eindeutigkeit der Lösung folgt sofort aus der Darstellung.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir in der Behauptung des Satzes  $x_0 = 0$  wählen. Nach Definition ist

$$u(x) = \int_{\partial B_R(0)} P_R(x, y) g(y) \, do(y) \quad (x \in B_R(0)).$$

In (1.7) haben wir bewiesen, dass gilt

$$P_R(x, y) = -\frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y, x) \quad (|x| < R, |y| = R).$$

Man beachte, dass hier die Normale bezüglich der  $y$ -Variablen gemeint ist. Daraus folgt nun sofort für festes  $|y| = R$  bezüglich  $|x| < R$  wegen der Symmetrie von  $\phi$ :

$$\Delta P_R(\cdot, y) = -\Delta \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y, \cdot) = -\frac{\partial}{\partial \nu} \underbrace{\Delta \phi(y, \cdot)}_{=0} = 0.$$

Also ist  $u \in C^2(B_R(0))$  und  $\Delta u = 0$  dort. Zu zeigen bleibt, dass  $u$  bis zum Rand stetig ist, d. h.  $u(x) \rightarrow g(x_*)$  ( $x \rightarrow x_*$ ,  $|x| < R$ ,  $|x_*| = R$ ). Dazu beobachten wir, dass die Funktion  $\tilde{u}(x) = 1$  eine Lösung von  $\Delta \tilde{u} = 0$  in  $B_R(0)$ ,  $\tilde{u} = 1$  auf  $\partial B_R$  ist. Also liefert uns Satz 1.13

$$1 = \int_{\partial B_R(0)} P_R(x, y) \, do(y). \tag{1.8}$$

Wir zeigen nun für festes  $|x_*| = R$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (|x| < R \wedge |x - x_*| < \delta \Rightarrow |u(x) - g(x_*)| < \varepsilon).$$

Sei nun also  $|x - x_*| < \delta$ ,  $|x| < R$ ,  $|x_*| = R$ . Es ist dann

$$\begin{aligned} |u(x) - g(x_*)| &= \left| \int_{\partial B_R(0)} P_R(x, y) g(y) \, do(y) - g(x_*) \right| \\ &= \left| \int_{\partial B_R(0)} P_R(x, y) (g(y) - g(x_*)) \, do(y) \right| \\ &\leq \int_{\partial B_R(0)} P_R(x, y) |g(y) - g(x_*)| \, do(y) \quad (P_R > 0 \text{ für diese } x, y) \\ &= \int_{\partial B_R(0) \cap \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x_*| < 2\delta_1\}} P_R(x, y) |g(y) - g(x_*)| \, do(y) + \int_{\partial B_R(0) \cap \{y \mid |y - x_*| \geq 2\delta_1\}} P_R(x, y) |g(y) - g(x_*)| \, do(y) \\ &\leq \max_{\substack{y \in \partial B_R(0) \\ |y - x_*| < 2\delta_1}} |g(y) - g(x_*)| \int_{\partial B_R(0) \cap \{|y - x_*| < 2\delta_1\}} P_R(x, y) \, do(y) + 2 \max_{\partial B_R(0)} |g| \int_{\partial B_R(0) \cap \{|y - x_*| \geq 2\delta_1\}} P_R(x, y) \, do(y) \end{aligned}$$

Im einzelnen kann man dann so weiter abschätzen:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_R(0) \cap \{|y - x_*| < 2\delta_1\}} P_R(x, y) \, do(y) &\leq \int_{\partial B_R(0)} P_R(x, y) \, do(y) = 1, \\ \int_{\partial B_R(0) \cap \{|y - x_*| \geq 2\delta_1\}} P_R(x, y) \, do(y) &\leq \frac{1}{w_n R} \int_{\partial B_R(0) \cap \{|y - x_*| \geq 2\delta_1\}} \frac{R^2 - |x|^2}{|y - x|^n} \, do(y) \\ &\leq \frac{1}{w_n R} \frac{R^2 - |x|^2}{\delta_1^n} \int_{\partial B_R(0)} do(y) = \frac{R^{n-2}(R^2 - |x|^2)}{\delta_1^n}, \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass

$$|y - x| \geq |y - x_*| - |x - x_*| \geq 2\delta_1 - \delta \geq \delta_1,$$

falls  $\delta \leq \delta_1$  gewählt wird. Damit folgt dann insgesamt:

$$|u(x) - g(x_*)| \leq \max_{\substack{|y|=R \\ |y - x_*| < 2\delta_1}} |g(y) - g(x_*)| + 2 \max_{\partial B_R(0)} |g| \frac{R^{n-2}(R^2 - |x|^2)}{\delta_1^n}$$

Dann folgt weiter

$$R^2 - |x|^2 = (R - |x|)(R + |x|) = (|x_*| - |x|)(R + |x|) \leq |x_* - x| 2R < 2R\delta.$$

Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $\delta_1 > 0$  so klein, dass

$$\max_{\substack{|y|=R \\ |y - x_*| < 2\delta_1}} |g(y) - g(x_*)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt ( $g$  ist gleichmäßig stetig auf  $\partial B_R(0)$ ). Danach wähle  $\delta \in (0, \delta_1]$  so klein, dass gilt

$$4 \max_{\partial B_R(0)} |g| \frac{R^{n-1} \delta}{\delta_1^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann folgt also  $|u(x) - g(x_*)| < \varepsilon$  für  $|x - x_*| < \delta$ . □

Wir haben damit unsere erste partielle Differentialgleichung (durch eine Formel sogar) gelöst. Aber leider haben wir das nur für das spezielle Gebiet  $G = B_R(x_0)$  geschafft. Um das Randwertproblem für die Poissongleichung auf allgemeineren Gebieten zu lösen, bräuchte man jetzt deren Greensche Funktion. Es gibt zu vielen Gebieten explizit bekannte Greensche Funktionen. Aber im allgemeinen kann man lediglich - unter geeigneten Annahmen - die Existenz einer Greenschen Funktion nachweisen.

### 1.4 Das Maximumprinzip für harmonische Funktionen

**Satz 1.15 (Mittelwertgleichung)** Sei  $u$  in der offenen Menge  $G \subset \mathbb{R}^n$  harmonisch. Dann gelten für jede Kugel  $\overline{B_R(x_0)} \subset G$  die Mittelwertgleichungen

$$u(x_0) = \frac{1}{w_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y) d\sigma(y) = \frac{1}{|\partial B_R(x_0)|} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y) d\sigma(y)$$

und

$$u(x_0) = \frac{n}{w_n R^n} \int_{B_R(x_0)} u(y) dy = \frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{B_R(x_0)} u(y) dy.$$

*Beweis.* Nach Satz 1.14 wissen wir, dass

$$u(x_0) = \frac{1}{w_n R} \int_{\partial B_R(x_0)} \frac{R^2}{|y - x_0|^n} u(y) d\sigma(y) = \frac{R}{w_n} \int_{\partial B_R(x_0)} \frac{1}{R^n} u(y) d\sigma(y) = \frac{1}{w_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y) d\sigma(y).$$

Dies gilt aber nicht nur für dieses  $R$  sondern für alle  $r \in (0, R]$ :

$$u(x_0) = \frac{1}{w_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y) d\sigma(y) = \frac{1}{w_n} \int_{S^{n-1}} u(x_0 + r\xi) d\sigma(\xi)$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit  $r^{n-1}$  und integrieren dann bezüglich  $r$  von 0 bis  $R$ , so erhalten wir

$$\int_0^R r^{n-1} u(x_0) dr = \frac{1}{w_n} \int_0^R \int_{S^{n-1}} u(x_0 + r\xi) r^{n-1} d\sigma(\xi) dr$$

und demnach folgt

$$\frac{1}{n} R^n u(x_0) = \frac{1}{w_n} \int_{B_R(x_0)} u(y) d\sigma(y).$$

□

**Satz 1.16 (Starkes Maximumprinzip)** Es sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und es sei  $u$  in  $G$  harmonisch. Gibt es dann einen Punkt  $x_0 \in G$ , so dass

$$u(x_0) = \inf_{x \in G} u(x) \quad \text{oder} \quad u(x_0) = \sup_{x \in G} u(x),$$

so ist  $u$  in  $G$  konstant.

*Beweis.* Es sei  $x_1 \in G$ ,  $x_1 \neq x_0$  beliebig. Nach Voraussetzung ist  $G$  ein Gebiet, also (wegweise) zusammenhängend, d. h. es gibt eine Funktion  $\varphi$  mit den Eigenschaften

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow G, \quad \varphi(0) = x_0, \quad \varphi(1) = x_1, \quad \varphi \in C^0([0, 1]).$$

Definiere  $M := u(x_0) = \inf_G u$  und setze

$$I := \{s \in [0, 1] \mid u(\varphi(t)) = M \quad \forall t \in [0, s]\}.$$

Wir zeigen nun, dass  $I = [0, 1]$  ist. Daraus folgt dann insbesondere, dass  $u(x_1) = u(x_0) = M$  ist, und da  $x_1 \in G$  beliebig war, erhalten wir, dass  $u$  in  $G$  konstant ist.

$I$  ist nicht die leere Menge, denn nach Voraussetzung ist  $0 \in I$ .  $I$  ist abgeschlossen, weil  $u$  stetig ist. Also gibt es ein maximales  $s_* \in [0, 1]$ , so dass  $I = [0, s_*]$ . Wir nehmen an, dass  $s_* < 1$  ist und

setzen  $x_* := \varphi(s_*)$ . Da  $\varphi(s_*) \in G$  und  $G$  offen ist, gibt es ein  $R > 0$  mit  $\overline{B_R(x_*)} \subset G$ . Die Funktion  $v(x) := u(x) - M$  ist harmonisch in  $G$  und ausserdem nicht negativ. Dann folgt aber

$$0 = |B_R(x_*)|v(x_*) = \int_{B_R(x_*)} \underbrace{v(x)}_{\geq 0} dx.$$

und dies impliziert

$$v(x) = 0 \quad \forall x \in B_R(x_*).$$

Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von  $s_*$ . □

**Folgerung 1.17 (Schwach Maximumprinzip)** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet. Ist dann  $u \in C^0(\overline{G})$  in  $G$  harmonisch, so hat man

$$\min_{\overline{G}} u = \min_{\partial G} u \quad \text{und} \quad \max_{\overline{G}} u = \max_{\partial G} u.$$

**Bemerkung** Diese Aussage ist für unbeschränkte Gebiete im allgemeinen falsch! Dies sieht man an dem einfachen Beispiel  $G := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 < 0\}$  und  $u(x) := -x_2$ .

*Beweis.* Für den ersten Fall. Die Menge  $\overline{G}$  ist kompakt, also wird ein Minimum von  $u$  in  $\overline{G}$  angenommen, da  $u \in C^0(\overline{G})$ . Falls  $u(x_0) = \min_{\overline{G}} u$  und  $x_0 \in G$  ist, dann ist  $u$  nach dem starken Maximumprinzip konstant, also auch  $\min_{\overline{G}} u = \min_{\partial G} u$ . Liegt  $x_0$  auf dem Rand von  $G$ , so ist die Aussage sowieso wahr. □

Aus dem schwachen Maximumprinzip können wir leicht folgern, dass das Randwertproblem für die Poissongleichung höchstens eine Lösung hat.

**Folgerung 1.18** Für ein beschränktes Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  hat das Randwertproblem  $u \in C^0(\overline{G}) \cap C^2(G)$ ,  $-\Delta u = f$  in  $G$ ,  $u = g$  auf  $\partial G$  höchstens eine Lösung.

**Beispiel** Es gibt beschränkte Gebiete  $G$ , für die das Randwertproblem,

$$u \in C^0(\overline{G}) \cap C^2(G), \quad \Delta u = 0 \text{ in } G, \quad u = g \text{ auf } \partial G,$$

zu vorgegebenen Randwerten  $g \in C^0(\partial G)$  unlösbar ist. Wähle als Gebiet  $G := \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x| < R\}$ ,  $n \geq 3$ . Dann ist der Rand von  $G$  durch  $\partial G = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = R\} \cup \{0\}$  gegeben. Geben wir nun die Randwerte

$$g(x) := \begin{cases} 1 & (|x| = R) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

vor, dann ist  $g \in C^0(\partial G)$ , aber das Randwertproblem hat keine Lösung.

## 1.5 Das Newtonpotential

Bisher haben wir für Kugeln die homogene Differentialgleichung  $\Delta u = 0$  in  $G$  gelöst. Wir wollen nun versuchen die inhomogene Differentialgleichung  $-\Delta u = f$  in  $G$  zu lösen. Ziel ist immer noch die Lösung des Randwertproblems

$$(*) \quad -\Delta u = f \text{ in } G, \quad u = g \text{ auf } \partial G.$$

Für welche  $f$  ist dieses Problem lösbar? Unsere Ideen hatten wir aus der Darstellungsformel

$$u(x) = \int_{\partial G} \phi(y, x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y, x) d\sigma(y) - \int_G \phi(y, x) (\Delta u)(y) dy$$

gewonnen.  $\phi$  ist hier eine beliebige Grundlösung von  $\Delta u = 0$ . Ist  $\phi$  eine Greensche Funktion und  $u$  eine genügend glatte Lösung von  $(*)$ , so folgt

$$u(x) = - \int_{\partial G} g(y) \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y, x) d\sigma(y) + \int_G \phi(y, x) f(y) dy$$

Wir könnten nun das Volumenintegral auf der rechten Seite dieser Gleichung studieren. Wir gehen aber etwas anders vor, indem wir zunächst nur die Singularitätenfunktion im Volumenintegral untersuchen.

Die folgenden Sätze zum Newtonpotential zitieren wir nur. Wir werden die inhomogene Differentialgleichung später mit anderen Methoden lösen. Aber die Eigenschaften des Newtonpotentials sollte man trotzdem zur Kenntnis nehmen.

**Definition 1.19 (Newtonpotential)** Es sei  $f$  auf  $G \subset \mathbb{R}^n$  Riemann-integrierbar. Dann heißt

$$w(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \int_G \log|x-y|f(y)dy & (n=2) \\ \frac{1}{\omega_n(n-2)} \int_G |x-y|^{2-n}f(y)dy & (n \neq 2) \end{cases}, x \in G \tag{1.9}$$

Newtonpotential von  $f$ .

Wir vermuten, dass unter geeigneten Voraussetzungen  $-\Delta w = f$  in  $G$  gilt.

**Satz 1.20** Ist  $f \in C^0(G)$  und  $\sup_G |f| < \infty$ , so ist das Newtonpotential  $w \in C^1(\overline{G})$  und

$$\frac{\partial w}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_G \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n} f(y) dy \quad (x \in G) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Einen Beweis dieser Aussage findet man z. B. in dem Buch von Gilbarg und Trudinger.

Leider ist unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes  $w$  nicht in  $C^2(G)$ . Dazu müssen wir mehr an  $f$  voraussetzen.  $f$  muss nicht nur stetig, sondern h\"olderstetig sein. Die H\"olderstetigkeit ist eine Eigenschaft, die zwischen der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit einer Funktion angesiedelt ist.

**Definition 1.21 (H\"olderstetigkeit)** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Dann heißt  $u$  in  $M$  h\"olderstetig mit H\"olderexponent  $\alpha \in (0, 1]$ , wenn

$$\forall K \subset M, K \text{ kompakt}, \exists c \quad \forall x_1, x_2 \in K : |u(x_1) - u(x_2)| \leq c|x_1 - x_2|^\alpha.$$

Im Fall  $\alpha = 1$  spricht man auch von Lipschitzstetigkeit. Die Menge der in  $M$  h\"olderstetigen Funktionen bezeichnen wir mit

$$C^{0,\alpha}(M) = \{v : M \rightarrow \mathbb{R} \mid v \text{ ist in } M \text{ h\"olderstetig mit Exponent } \alpha\}.$$

**Beispiel 1.22** Die Funktion  $v(x) = |x|^{\alpha'}$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ) liegt in  $C^{0,\alpha'}(\mathbb{R}^n)$  f\"ur alle  $\alpha' \in (0, \alpha]$ .

Nun sind wir in der Lage, die zweiten Ableitungen des Newtonpotentials zu berechnen.

**Satz 1.23** F\"ur offenes  $G \subset \mathbb{R}^n$  sei  $f \in C^{0,\alpha}(G)$  und au\sserdem  $\sup_G |f| < \infty$ . Dann ist  $w \in C^2(G)$ , und die zweiten partiellen Ableitungen von  $w$  sind h\"olderstetig mit Exponent  $\alpha$  in  $G$  und sind gegeben durch

$$w_{x_i x_j}(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_{G_0} \left( \delta_{ij} - n \frac{x_i - y_i}{|x-y|} \frac{x_j - y_j}{|x-y|} \right) \frac{f(y) - f(x)}{|y-x|^n} dy + \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial G_0} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n} \nu_j(y) d\sigma(y) f(x) \quad (x \in G) \tag{1.10}$$

( $i, j = 1, \dots, n$ ) f\"ur jedes Normalgebiet  $G_0 \supset G$ . Hierbei setzen wir  $f(y) = 0$  f\"ur ( $y \in G_0 \setminus G$ ).

Au\sserdem gilt

$$-\Delta w = f \text{ in } G. \tag{1.11}$$

*Beweis.* Einen Beweis findet man in Gilbarg-Trudinger. Hier wollen wir nur zeigen, wie aus der Formel (1.10) für die zweiten partiellen Ableitungen von  $w$  die Differentialgleichung (1.11) folgt. Es folgt dann sofort:

$$\begin{aligned} -\Delta w(x) &= -\sum_{i=1}^n w_{x_i x_i}(x) \\ &= \frac{1}{w_n} \int_{G_0} \sum_{i=1}^n \left(1 - n \frac{(x_i - y_i)^2}{|x - y|^2}\right) \frac{f(y) - f(x)}{|y - x|^n} dy - \frac{1}{w_n} \int_{\partial G_0} \sum_{i=1}^n \frac{x_i - y_i}{|x - y|^n} \nu_i(y) d\sigma(y) f(x) \\ &= \frac{1}{w_n} \int_{G_0} \left(n - n \frac{|x - y|^2}{|x - y|^2}\right) \frac{f(y) - f(x)}{|x - y|^n} dy - \frac{1}{w_n} \int_{\partial G_0} \frac{x - y}{|x - y|^n} \cdot \nu(y) d\sigma(y) f(x) \\ &= -\frac{1}{w_n} \int_{\partial G_0} \frac{x - y}{|x - y|^n} \cdot \nu(y) d\sigma(y) f(x). \end{aligned}$$

Es bleibt noch das Randintegral zu untersuchen. Satz 1.10 ergibt für  $u \in C^2(\overline{G}_0)$

$$u(x) = \int_{\partial G_0} \phi(y, x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial \phi}{\partial \nu_y}(y, x) d\sigma(y) - \int_{G_0} \phi(y, x) \Delta u(y) dy$$

für eine beliebige Grundlösung, also auch für die Singularitätenfunktion. Wähle  $u(x) \equiv 1$ . Dann ist  $\Delta u = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial G_0} = 0$  und  $\phi(y, x) = \frac{1}{(n-2)w_n} |x - y|^{2-n}$  ( $n \neq 2$ ), so dass also folgt:

$$\begin{aligned} 1 &= - \int_{\partial G_0} 1 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y, x) d\sigma(y) = - \int_{\partial G_0} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{(n-2)w_n} |x - y|^{2-n}\right)_{y_j} \nu_j(y) d\sigma(y) \\ &= - \int_{\partial G_0} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{w_n} |x - y|^{1-n} \frac{x_j - y_j}{|x - y|}\right) \nu_j(y) d\sigma(y) = -\frac{1}{w_n} \int_{\partial G_0} \frac{x - y}{|x - y|^n} \cdot \nu(y) d\sigma(y) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:  $-\Delta w = f$  in  $G$ . □

Der Vollständigkeit halber ziehen wir nun aus den (nur zitierten) Resultaten zum Newtonpotential und unseren bisherigen Resultaten die für uns wichtige Folgerung. Dabei beachten wir, dass wir bisher das Randwertproblem für harmonische Funktionen nur auf Kugeln lösen können.

**Satz 1.24** Sei  $G = B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ . Seien weiter  $g \in C^0(\partial G)$  und  $f \in C^{0,\alpha}(G)$ ,  $\sup_G |f| < \infty$ . Dann gibt es genau ein  $u \in C^2(G) \cap C^0(\overline{G})$  mit

$$-\Delta u = f \text{ in } G, \quad u = g \text{ auf } \partial G.$$

*Beweis.* Bezeichnen wir mit  $u_1$  das Newtonpotential zu  $f$ , dann ist nach Satz 1.20 und Satz 1.23  $u_1 \in C^1(\overline{G}) \cap C^2(G)$  und löst  $-\Delta u_1 = f$  in  $G$ . Nun löse mit Satz 1.14

$$\Delta u_2 = 0 \text{ in } G, \quad u_2 = g - u_1 \text{ auf } \partial G$$

und setze  $u := u_1 + u_2$ . Dann löst  $u \in C^0(\overline{G}) \cap C^2(G)$  das gewünschte Problem. Die Eindeutigkeit folgt mit dem Maximumprinzip. □

Zur Information wird der allgemeine Existenzsatz für das Randwertproblem für die Poissongleichung notiert.

**Satz 1.25** Es sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet, das der äußeren Kugelbedingung

$$\forall x_0 \in \partial G \quad \exists K = \{y \mid y = x_0 + r\xi, 0 < r < R, \xi \cdot \xi_0 < \cos(\delta_0), \xi \in S^{n-1}\} : \overline{K} \cap \overline{G} = \{x_0\} \quad (1.12)$$

mit geeigneten  $R > 0$ ,  $\xi_0 \in S^{n-1}$  und  $\delta_0 > 0$  genügt. Sei weiter  $g \in C^0(\partial G)$  und  $f \in C^{0,\alpha}(G)$ ,  $\sup_G |f| < \infty$ . Dann gibt es genau ein  $u \in C^0(\overline{G}) \cap C^2(G)$  mit  $u_{x_i x_j} \in C^{0,\alpha}(G)$ , so dass

$$-\Delta u = f \text{ in } G, \quad u = g \text{ auf } \partial G.$$

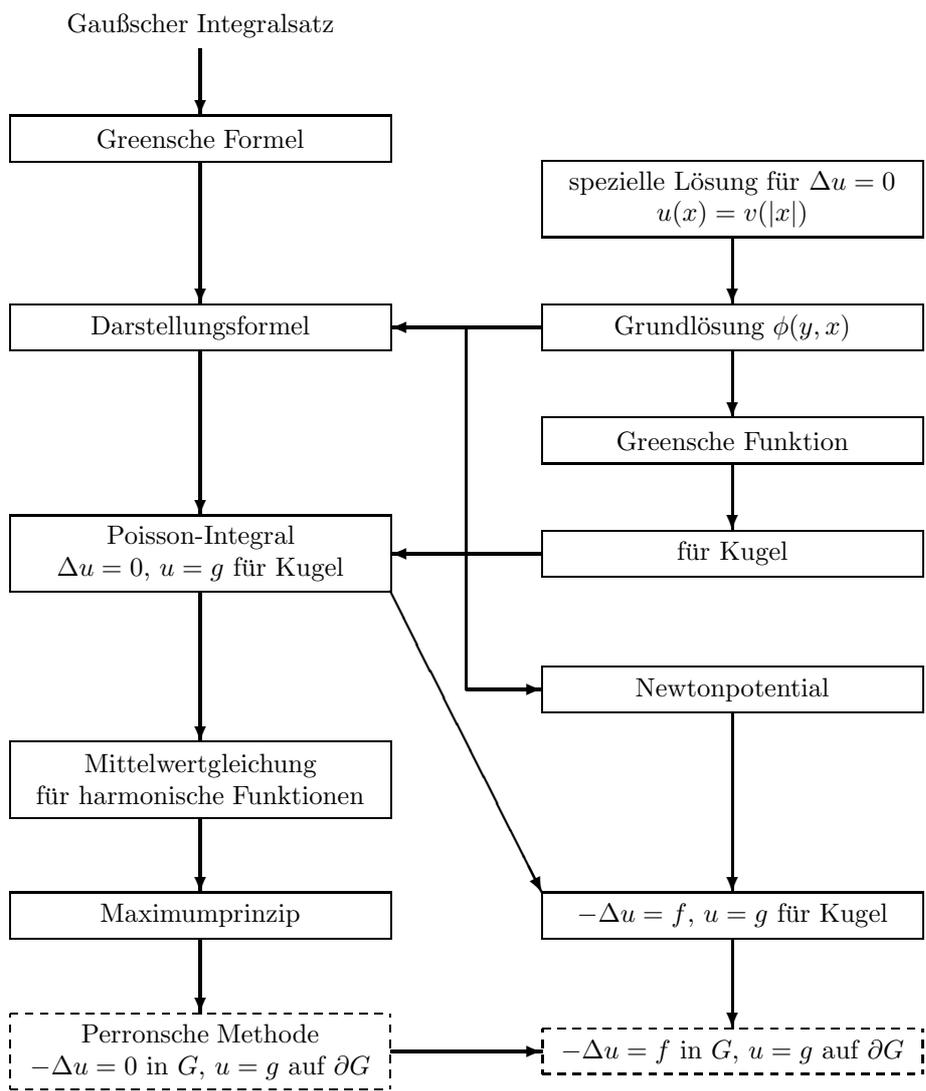


Abbildung 1.1: Struktur der Paragraphen 1.1 bis 1.5: Lösung des Randwertproblems für die Poisson-Gleichung (Klassische Theorie).

### 1.6 Diskretisierung am Beispiel eines Differenzenverfahrens

Wir diskretisieren das Randwertproblem für die Poissongleichung

$$-\Delta u = f \text{ in } G, \quad u = g \text{ auf } \partial G \tag{1.13}$$

mit finiten Differenzen. Bei dieser Gelegenheit führen wir die grundlegenden Begriffe Konsistenz, Stabilität und Konvergenz ein und schaffen uns einen abstrakten Rahmen für die Diskretisierung partieller Differentialgleichungen.

Ein abstrakter Rahmen für Diskretisierung ist durch das folgende Schema gegeben.

$$\begin{array}{ccc} X_0 & & Y_0 \\ \cup & & \cup \\ T : X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow D_h^X & & \downarrow D_h^Y \\ T_h : X_h & \longrightarrow & Y_h \end{array}$$

Abbildung 1.2 Schema für die Diskretisierung einer kontinuierlichen Gleichung.

Hierin sind  $X, Y, X_0, Y_0$  geeignete Räume für das kontinuierliche Problem,  $Tu = b$  bezeichnet für  $u \in X$  und  $b \in Y$  das zu lösende kontinuierliche Problem.  $X_h$  und  $Y_h$  sind geeignete diskrete Räume, die mit den kontinuierlichen Räumen durch Diskretisierungsabbildungen  $D_h^X$  und  $D_h^Y$  verbunden sind.  $h$  steht für die Gitterweite bzw. allgemeiner für einen Diskretisierungsparameter.

Im Fall des Randwertproblems für die Poissongleichung wählen wir nach den analytischen Erfahrungen der vorigen Paragraphen  $Tu = (-\Delta u, u|_{\partial G})$  und  $b = (f, g)$ , wobei wir als Räume

$$X = \{v \in C^0(\overline{G}) \cap C^{2,\alpha}(G) \mid \sup_G |\Delta v| < \infty\} \subset X_0$$

mit  $X_0 = C^0(\overline{G})$  und

$$Y = \{(v, w) \mid v \in C^{0,\alpha}(G), w \in C^0(\partial G), \sup_G |v| < \infty\} \subset Y_0$$

mit  $Y_0 = \{(v, w) \in C^0(G) \times C^0(\partial G) \mid \sup_G |v| < \infty\}$  wählen. Damit ist also

$$Tu = b \Leftrightarrow -\Delta u = f \text{ in } G, \quad u = g \text{ auf } \partial G.$$

**Lemma 1.26** *Es sei  $G$  ein Gebiet, das den Bedingungen von Satz 1.25 genügt. Dann ist die Abbildung  $T : X \rightarrow Y$  linear und bijektiv.*

*Beweis.* Dass durch  $T$  eine Abbildung von  $X$  nach  $Y$  gegeben ist, sieht man schnell ein. Ist  $v \in X$ , so folgt  $v \in C^0(\overline{G}) \cap C^{2,\alpha}(G)$  und  $\sup_G |\Delta v| < \infty$ . Durch  $T$  wird  $v$  abgebildet in  $Tv = (-\Delta v, v|_{\partial G})$ . Setzen wir  $\tilde{v} = -\Delta v$ , so ist  $\tilde{v} \in C^{0,\alpha}(G)$  und  $\sup_G |\tilde{v}| < \infty$ . Für  $\tilde{w} = v|_{\partial G}$  gilt:  $\tilde{w} \in C^0(\partial G)$ . Die Linearität von  $T$  ist klar.

$T$  ist injektiv. Es reicht zu zeigen:  $Tu = 0$  impliziert  $u = 0$ . Nun bedeutet  $Tu = 0$ , dass  $\Delta u = 0$  in  $G$  und  $u|_{\partial G} = 0$  ist. Das Maximumprinzip 1.17 liefert dann  $u = 0$  in  $\overline{G}$ .

$T$  ist surjektiv. Zu jedem Paar  $(f, g) \in Y$  gibt es ein  $u \in X$ , so dass  $Tu = (f, g)$  gilt. Es ist  $(f, g) \in Y$ , falls  $f \in C^{0,\alpha}(G)$  mit  $\sup_G |f| < \infty$  und  $g \in C^0(\partial G)$  sind. Nach Satz 1.25 gibt es dann eine Lösung von  $-\Delta u = f$  in  $G, u = g$  auf  $\partial G$ . Beachte dann außerdem, dass  $\sup_G |\Delta u| = \sup_G |f| < \infty$  ist. □

Zur Diskretisierung erfinden wir nun diskrete Räume  $X_h, Y_h$  zusammen mit den Diskretisierungsabbildungen  $D_h^X, D_h^Y$ . Die klassische Methode ist, dass  $X_h, Y_h$  aus Gitterfunktionen bestehen. Wir überdecken  $\overline{G}$  mit einem Gitter der Gitterweite  $h > 0$ :

$$\overline{G}_h = \overline{G} \cap h\mathbb{Z}^n$$

und definieren den Gitterrand durch

$$\partial G_h = \{x \in \overline{G}_h \mid \text{dist}(x, \partial G) < h\}.$$

Dabei verwenden wir den dem Gitter angepassten Abstandsbegriff  $\text{dist}(x, \partial G) = \inf_{y \in \partial G} \|x - y\|_{l^\infty}$  mit  $\|z\|_{l^\infty} = \max_{j=1, \dots, n} |z_j|$  für  $z \in \mathbb{R}^n$ . Dementsprechend erklären wir

$$G_h = \overline{G}_h \setminus \partial G_h.$$

Als diskrete Räume wählen wir die Gitterfunktionen auf  $\overline{G}_h$  bzw.  $\partial G_h$ :

$$X_h = \{v_h : \overline{G}_h \rightarrow \mathbb{R}\}, \quad Y_h = \{(v_h, w_h) \mid v_h : G_h \rightarrow \mathbb{R}, w_h : \partial G_h \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Die Diskretisierungsabbildungen sind Einschränkungen auf die Gitter. Dabei verlangen wir, dass  $\partial G_h \subset \partial G$  ist. Dies ist eine sehr einschränkende Bedingung, die im allgemeinen durch kompliziertere Abbildungen ersetzt werden muss. Wir wollen hier jedoch nur den Rahmen für Differenzenverfahren kennenlernen. Deshalb ist dies hier legitim.

$$D_h^X v = v|_{\overline{G}_h}, \quad D_h^Y (v, w) = (v|_{G_h}, w|_{\partial G_h}).$$

Den diskreten Operator erklären wir durch

$$T_h u_h = (-\Delta_h u_h, u_h|_{\partial G_h}), \quad u_h \in X_h.$$

wobei für  $x \in G_h$  definiert wird:

$$(-\Delta_h u_h)(x) = \frac{1}{h^2} \left( 2nu_h(x) - \sum_{j=1}^n u_h(x + he_j) - \sum_{j=1}^n u_h(x - he_j) \right).$$

Man beachte, dass  $-\Delta_h$  nur auf inneren Gitterpunkten erklärt ist.

Das diskrete Problem lautet nun: Zu  $(f_h, g_h) \in Y_h$  finde (genau ein)  $u_h \in X_h$ , so dass gilt:  $T_h u_h = (f_h, g_h)$

**Lemma 1.27**  $T_h : X_h \rightarrow Y_h$  ist linear und bijektiv.

*Beweis.* Die Linearität ist klar. Nun ist  $T_h u_h = (f_h, g_h)$  genau dann, wenn

$$-\Delta_h u_h = f_h \text{ auf } G_h, \quad u_h = g_h \text{ auf } \partial G_h. \tag{1.14}$$

Das ist aber ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Werte von  $u_h$  auf  $\overline{G}_h$ . Es handelt sich um  $|\overline{G}_h|$  Unbekannte und  $|G_h| + |\partial G_h| = |\overline{G}_h|$  Gleichungen. Also ist Injektivität von  $T_h$  äquivalent zur Surjektivität. Wir weisen die Injektivität, d. h. die Eindeutigkeit nach. Dazu ist nachzuweisen, dass aus  $T_h u_h = (0, 0)$  folgt:  $u_h = 0$  auf  $\overline{G}_h$ . Aus  $(-\Delta_h u_h, u_h|_{\partial G_h}) = (0, 0)$  folgt sofort, dass  $u_h = 0$  auf  $\partial G_h$  ist. Es bleibt zu beweisen, dass  $u_h$  an den inneren Knoten verschwindet. Aus der diskreten Differentialgleichung  $-\Delta_h u_h = 0$  folgt die diskrete Mittelwertgleichung

$$u_h(x) = \frac{1}{2n} \left( \sum_{j=1}^n u_h(x - he_j) + \sum_{j=1}^n u_h(x + he_j) \right) \tag{1.15}$$

für  $x \in G_h$ . Beachte die Analogie zur kontinuierlichen Mittelwertgleichung 1.15. Angenommen, es gibt einen Gitterpunkt  $x_0 \in G_h$ , in dem  $u_h$  ein Maximum annimmt, d. h.  $u_h(x_0) = \max_{x \in \overline{G}_h} u_h(x)$  gilt. Gleichung 1.15 in diesem Punkt impliziert dann

$$\sum_{j=1}^n \underbrace{(u_h(x_0) - u_h(x_0 + he_j))}_{\geq 0} + \sum_{j=1}^n \underbrace{(u_h(x_0) - u_h(x_0 - he_j))}_{\geq 0} = 0 \tag{1.16}$$

Damit ist  $u_h$  auf dem Differenzenstern  $x_0 \pm he_j$  konstant gleich  $u_h(x_0)$ . Nun müssen wir diese Eigenschaft auf ganz  $G_h$  ausdehnen. Das geschieht beim Beweis der Stabilität weiter unten. Damit folgt dann:  $u_h = 0$  in  $\overline{G}_h$ . □

**Beispiel 1.28** In zwei Raumdimensionen ( $n = 2$ ) und für das Gebiet  $G = (0, 1) \times (0, 1)$  und die Gitterweite  $h = 1/(N + 1)$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , ist

$$\overline{G}_h = \{(hi, hj) | 0 \leq i, j \leq N + 1\}, \partial G_h = \{(hi, hj) \in \overline{G}_h | i = 0, N + 1 \text{ oder } j = 0, N + 1\}.$$

Wir kürzen für eine Gitterfunktion  $v$  ab:  $v_{ij} = v(hi, hj)$ . Damit lautet das Gleichungssystem 2.6

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} (4u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) &= f_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq N, \\ u_{ij} &= g_{ij} \quad \text{in den anderen Knoten.} \end{aligned}$$

Die Lösung solcher Gleichungssysteme war Gegenstand der Untersuchungen in den einführenden Vorlesungen Numerik I und II. Es handelt sich um ein symmetrisches Gleichungssystem mit Block-Tridiagonal-Struktur, wenn man die übliche lexigraphische Numerierung beibehält.

Es erhebt sich die wesentliche Frage, ob die Lösung des diskreten Problems 2.6 eine Approximation des kontinuierlichen Problems 3.27 liefert, d. h. gilt mit einer geeigneten Norm  $\|u_h - u\| \rightarrow 0$ , wenn die Gitterweite  $h \rightarrow 0$  konvergiert? Zur Untersuchung dieses Problems führen wir die grundlegenden Konzepte der numerischen Analysis ein. Insbesondere benötigen wir nun normierte Räume.

**Definition 1.29** Es liege die Situation des Schemas 1.2 vor. Dabei seien  $X_0, Y_0, X_h, Y_h$  normierte Räume und  $X \subset X_0, Y \subset Y_0$  Teilräume. Das Schema heißt:

*konsistent*, falls für alle  $u \in X$  gilt:

$$\|T_h D_h^X u - D_h^Y T u\|_{Y_h} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0),$$

*stabil*, falls es eine von  $h$  unabhängige Konstante  $c_{Stab} > 0$  gibt, so dass für alle  $v_h \in X_h$  gilt:

$$\|v_h\|_{X_h} \leq c_{Stab} \|T_h v_h\|_{Y_h},$$

*konvergent*, falls für die Lösung  $u_h \in X_h$  von  $T_h u_h = b_h$  zu  $b_h \in Y_h$  und die Lösung  $u \in X$  von  $T u = b$  zu  $b \in Y$  gilt:

$$\|u_h - D_h^X u\|_{X_h} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).$$

**Satz 1.30** *Konsistenz und Stabilität implizieren Konvergenz, falls die Daten konsistent approximiert werden:*

$$\|b_h - D_h^Y b\|_{Y_h} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).$$

Man kann natürlich auch gleich  $b_h = D_h^Y b$  wählen.

Auch die umgekehrte Richtung ist wahr. Der Beweis verwendet allerdings das Prinzip der Normbeschränktheit, das in der linearen Funktionalanalysis bewiesen wird. Für uns ist im Moment aber nur die Aussage des Satzes wichtig. Für nichtlineare Abbildungen  $T$  ist die Aussage im allgemeinen falsch.

Auch eine quantitative Version des Satzes gilt. Hat man Konsistenz der Ordnung  $\alpha$ , d. h. gilt für  $h \leq h_0$

$$\|T_h D_h^X u - D_h^Y T u\|_{Y_h} \leq ch^\alpha,$$

wird die rechte Seite von der Ordnung  $\alpha$  approximiert, und hat man Stabilität, so folgt Konvergenz der Ordnung  $\alpha$ :

$$\|u_h - D_h^X u\|_{X_h} \leq ch^\alpha.$$

Der Beweis ist offensichtlich analog zu dem nun folgenden Beweis des Satzes.

*Beweis.* Es seien also  $u \in X$ ,  $u_h \in X_h$ ,  $b \in Y$ ,  $b_h \in Y_h$  und  $T u = b, T_h u_h = b_h$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \|u_h - D_h^X u\|_{X_h} &\leq c_{Stab} \|T_h (u_h - D_h^X u)\|_{Y_h} = c_{Stab} \|T_h u_h - T_h D_h^X u\|_{Y_h} \\ &= c_{Stab} \underbrace{\|(T_h u_h - b_h)\|_{Y_h}}_{=0} + \underbrace{\|(b_h - D_h^Y b)\|_{Y_h}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|(D_h^Y b - T_h D_h^X u)\|_{Y_h}}_{\rightarrow 0} \\ &\leq c_{Stab} \left\{ \underbrace{\|b_h - D_h^Y b\|_{Y_h}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|D_h^Y T u - T_h D_h^X u\|_{Y_h}}_{\rightarrow 0} \right\}. \end{aligned}$$

Und das ergibt die Behauptung des Satzes. □

Für den Fall des Differenzenverfahrens für das Randwertproblem für die Poissongleichung wählen wir folgende Normen auf den am Anfang dieses Paragraphen gewählten Räumen:

$$\begin{aligned} \|v\|_X &= \max_{\overline{G}} |v|, & \|(v, w)\|_Y &= \sup_G |v| + \sup_{\partial G} |w|, \\ \|v_h\|_{X_h} &= \max_{\overline{G}_h} |v_h|, & \|(v_h, w_h)\|_{Y_h} &= \max_{G_h} |v_h| + \max_{\partial G_h} |w_h|. \end{aligned}$$

Wir weisen Konsistenz und Stabilität für unser Problem 2.6 nach. Danach folgt mit Satz 1.30 die Konvergenz des Verfahrens.

Der Nachweise der *Konsistenz* besteht wegen der Verwendung der klassischen Funktionenräume in einer angemessenen Taylorentwicklung. Die in der Definition der Konsistenz vorkommenden Größen sind

$$\begin{aligned} T_h D_h^X u &= (-\Delta_h D_h^X u, D_h^X u|_{\partial G_h}) = (-\Delta_h u|_{G_h}, u|_{\partial G_h}), \\ D_h^Y T u &= D_h^Y (-\Delta u, u|_{\partial G}) = ((-\Delta u)|_{G_h}, u|_{\partial G_h}). \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$T_h D_h^X - D_h^Y T u = (-\Delta_h(u|_{G_h}) + (\Delta u)|_{G_h}, 0)$$

und damit dann

$$\|T_h D_h^X u - D_h^Y T u\|_{Y_h} = \max_{x \in G_h} |\Delta_h(u|_{G_h})(x) - \Delta u(x)|.$$

Für  $x \in G_h$  entwickeln wir die Funktion  $u(x \pm h e_i)$  nach Taylor und erhalten

$$u(x \pm h e_i) = u(x) \pm u_{x_i}(x)h + \frac{1}{2} u_{x_i x_i}(x)h^2 + o(1)$$

mit  $o(1) \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ . Addition dieser beiden Gleichungen und Summation über  $i$  ergibt

$$\Delta u(x) - \Delta_h(u|_{G_h})(x) = \Delta u(x) + \frac{1}{h^2} \left( 2nu(x) - \sum_{j=1}^n u(x + h e_j) - \sum_{j=1}^n u(x - h e_j) \right) = o(1)$$

Wir erhalten

$$\max_{x \in G_h} |\Delta u(x) - \Delta_h(u|_{G_h})(x)| \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0,$$

also Konsistenz. Außerdem beobachten wir: Ist sogar  $u \in C^4(\overline{G})$ , so können wir die Taylorentwicklung weitertreiben und erhalten sogar Konsistenz der Ordnung 2:

$$\max_{x \in G_h} |\Delta u(x) - \Delta_h(u|_{G_h})(x)| \leq c \|u\|_{C^4(\overline{G})} h^2.$$

Dazu wäre aber die Definition der Konsistenz auf Lösungen  $u$  der kontinuierlichen Gleichung einzuschränken.

Wenden wir uns dem Nachweis der *Stabilität* unseres Algorithmus zu. Wir weisen folgende Aussage nach:

*Es sei  $G$  beschränkt und  $-\Delta_h u_h \leq 0$  in  $G_h$ . Dann gilt:  $\max_{\overline{G}_h} u_h \leq \max_{\partial G_h} u_h$ .*

Sei  $C = u_h(x_0) = \max_{\overline{G}_h} u_h$ . Liegt  $x_0 \in \partial G_h$ , so ist die Behauptung richtig. Also müssen wir uns nur den Fall  $x_0 \in G_h$  ansehen. Die Argumentation ist nun ähnlich wie beim Nachweis der Eindeutigkeit einer Lösung des linearen Gleichungssystems. Wir haben nach Annahme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} \left( 2nu_h(x_0) - \sum_{j=1}^n u_h(x_0 + h e_j) - \sum_{j=1}^n u_h(x_0 - h e_j) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \underbrace{(u_h(x_0) - u_h(x_0 + h e_j))}_{\geq 0} + \sum_{j=1}^n \underbrace{(u_h(x_0) - u_h(x_0 - h e_j))}_{\geq 0} \leq 0. \end{aligned}$$

Also ist  $u_h(x_0) = u_h(x_0 \pm he_j) = C$  für  $j = 1, \dots, n$ . Wir sagen, was ein wegweiser Zusammenhang des Gitters ist:  $x_0$  und  $x \in G_h$  sind durch einen Weg in  $G_h$  verbunden, falls es  $y_0, \dots, y_k \in G_h$  gibt, so dass  $y_0 = x_0, y_k = x, y_{i-1} = y_i \pm he_j$  für  $i = 1, \dots, k$  und jeweils ein  $j \in \{1, \dots, n\}$  gilt. Die zu  $x_0$  gehörende Zusammenhangskomponente von  $G_h$  bezeichnen wir mit

$$G_h^{weg}(x_0) = \{x \in G_h | x \text{ ist mit } x_0 \text{ durch einen Weg in } G_h \text{ verbunden}\}$$

und entsprechend

$$G_h^{\overline{weg}}(x_0) = \{x \in \overline{G}_h | \exists y \in G_h^{weg}(x_0) : x = y \pm he_j\}.$$

Man sieht leicht ein, dass  $\emptyset \neq G_h^{\overline{weg}}(x_0) \setminus G_h^{weg}(x_0) \subset \partial G_h$ . Damit gibt es ein  $x_1 \in \partial G_h \cap G_h^{\overline{weg}}(x_0)$  und demnach folgt

$$\max_{G_h} u_h = C = u_h(x_0) = u_h(\underbrace{x_1}_{\in \partial G_h}) \leq \max_{\partial G_h} u_h.$$

Die obigen Überlegungen erlauben es uns nun, folgendes kleine Lemma zu beweisen.

**Lemma.** Sei  $G_h \subset [-R, R]^n$ . Dann ist das Schema 1.2 stabil, d. h. es gibt eine Konstante  $c_{Stab} > 0$ , so dass für alle  $h$  und alle  $v_h \in X_h$  gilt:

$$\|v_h\|_{X_h} \leq c_{Stab} \|T_h v_h\|_{Y_h} = c_{Stab} \left( \max_{G_h} |\Delta_h v_h| + \max_{\partial G_h} |v_h| \right).$$

*Beweis.* Sei  $v_h \in X_h$ . Dann gilt

$$-\Delta_h v_h = f_h \leq \max_{G_h} f_h =: C_h.$$

Nun ist für die quadratische Funktion  $x_1^2$

$$-\Delta_h x_1^2 = \frac{1}{h^2} (2nx_1^2 - \sum_{j=1}^n (x_1 + h\delta_{1,j})^2 - \sum_{j=1}^n (x_1 - h\delta_{1,j})^2) = \frac{1}{h^2} (2x_1 - (x_1^2 + 2x_1h + h^2) - (x_1^2 - 2x_1h + h^2)) = -2.$$

Wir setzen  $u_h(x) := v_h(x) + \frac{\delta}{2} x_1^2$ . Dann gilt

$$-\Delta_h u_h(x) = -\Delta_h v_h(x) - \frac{\delta}{2} \Delta_h x_1^2 \leq C_h + \frac{\delta}{2} (-2) = C_h - \delta.$$

Mit  $\delta := C_h$  gilt also  $-\Delta_h u_h \leq 0$  auf  $G_h$ . Also folgt mit  $g_h = u_h|_{\partial G_h}$ :

$$\max_{\overline{G}_h} u_h \leq \max_{\partial G_h} u_h = \max_{x \in \partial G_h} (u_h(x) + \frac{C_h}{2} x_1^2) \leq \max_{\partial G_h} g_h + \frac{C_h}{2} R^2 \leq \max_{\partial G_h} |g_h| + \frac{R^2}{2} \max_{G_h} |f_h|.$$

Eine analoge Abschätzung nach unten ergibt dann insgesamt

$$\max_{\overline{G}_h} |u_h| \leq \max_{\partial G_h} |g_h| + \frac{R^2}{2} \max_{G_h} |f_h|$$

und damit

$$\max_{\overline{G}_h} |v_h| = \max_{x \in G_h} |u_h(x) + \frac{C_h}{2} x_1^2| \leq \max_{\overline{G}_h} |u_h| + \frac{R^2}{2} C_h \leq \max_{\partial G_h} |g_h| + R^2 \max_{G_h} |f_h|.$$

Damit ist nun insgesamt der folgende Konvergenzsatz für ein Differenzenverfahren für die Poisson-Gleichung bewiesen:

**Satz 1.31** Es sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet, das Gitter  $\overline{G}_h$  mit seinem Rand  $\partial G_h$  usw. wie oben. Dann gibt es zu jedem  $(f_h, g_h) \in Y_h$  genau eine diskrete Lösung  $u_h \in X_h$  von  $-\Delta_h u_h = f_h$  auf  $G_h$  und  $u_h = g_h$  auf  $\partial G_h$ . Ausserdem gilt

$$\|u_h - D_h^X u\|_{X_h} \rightarrow 0$$

für  $h \rightarrow 0$ . Liegt die kontinuierliche Lösung  $u \in C^4(\overline{G})$ , so gilt sogar

$$\|u_h - D_h^X u\|_{X_h} \leq Ch^2.$$

*Beweis.* Die Existenz einer Lösung folgt mit Lemma 1.28. Die Konvergenz folgt mit Satz 1.30 (mit Ordnung), da wir Konsistenz und Stabilität soeben beweisen haben.  $\square$

### 1.7 Das Dirichletsche Prinzip und warum man Sobolevräume braucht

Man kann Lösungen des Randwertproblems für die Poissongleichung als Minimum eines Funktionals finden. Dies sind die sogenannten „direkten Methoden der Variationsrechnung“. Wir untersuchen zunächst das Randwertproblem

$$-\Delta u = f \text{ in } G, \quad u = 0 \text{ auf } \partial G \tag{1.17}$$

zu einem beschränkten Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$ .

**Satz 1.32** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und sei  $f \in C^0(\overline{G})$ . Definiere den linearen Raum  $X = \{v \in C^1(\overline{G}) \mid v = 0 \text{ auf } \partial G\}$  und das Funktional

$$I(v) = \frac{1}{2} \int_G |\nabla v(x)|^2 dx - \int_G f(x)v(x) dx$$

für  $v \in X$ . Ist dann  $u \in X$  ein Minimum von  $I$  über  $X$ , d. h. ist  $I(u) = \inf_{v \in X} I(v) = \inf\{I(v) \mid v \in X\}$ , so folgt

$$\int_G \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \int_G f(x) \varphi(x) dx \tag{1.18}$$

für jedes  $\varphi \in X$ .

*Beweis.* Sind  $u, \varphi \in X$  und ist  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , so ist auch  $u + \varepsilon\varphi \in X$ . Demnach gilt nach Voraussetzung  $I(u) \leq I(u + \varepsilon\varphi)$ . Setzen wir nun  $g(\varepsilon) = I(u + \varepsilon\varphi)$ , so hat  $g$  in  $\varepsilon = 0$  ein Minimum:  $g(0) \leq g(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ . Außerdem beobachtet man, dass  $g$  ein quadratisches Polynom ist,

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_G |\nabla u|^2 + \varepsilon \int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_G |\nabla \varphi|^2 - \int_G f u - \varepsilon \int_G f \varphi,$$

und demnach differenzierbar ist. Also verschwindet die Ableitung von  $g$  in 0:

$$0 = g'(0) = \int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi - \int_G f \varphi.$$

Das war aber die Behauptung des Satzes. □

Unter einer zusätzlichen Annahme können wir folgern, dass damit das Problem (1.17) gelöst ist.

**Folgerung 1.33** Ist zusätzlich  $u \in C^2(G)$ , so ist  $-\Delta u = f$  in  $G$  und  $u = 0$  auf  $\partial G$ .

*Beweis.* Sei  $G_0 \subset G$  ein beliebiges Normalgebiet.  $\varphi \in X$  verschwinde außerhalb  $G_0$  (und auf  $\partial G_0$ ). Dann erhalten wir mit dem Gaußschen Integralsatz

$$0 = \int_{G_0} \nabla u \cdot \nabla \varphi - \int_{G_0} f \varphi = \int_{\partial G_0} \varphi \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_{G_0} \varphi \Delta u - \int_{G_0} \varphi f.$$

Damit folgt also

$$\int_{G_0} (\Delta u + f) \varphi = 0$$

für alle solchen Funktionen  $\varphi$ . Also erhalten wir  $\Delta u + f = 0$  auf  $G_0$  und damit die Behauptung der Folgerung. Für  $G_0$  kann man z. B. geeignete Kugeln wählen. □

Wir versuchen nun zu beweisen, dass es ein Minimum  $u \in X$  des Funktionals  $I$  auf  $X$  gibt. Dazu setzen wir

$$d = \inf_{v \in X} I(v).$$

1. Schritt: Der erste - hier besonders einfache - Schritt ist der Nachweis, dass

$$d < \infty$$

ist. Dies ist klar, denn die Nullfunktion liegt in  $X$ . Bei komplizierteren Variationsproblemen ist dieser Schritt unter Umständen schwierig.

2. Schritt:  $I$  ist auf  $X$  nach unten beschränkt:

$$d > -\infty.$$

Zum Nachweis dieser Eigenschaft benötigen wir die Poincarésche Ungleichung. Der Beweis wird später in allgemeinerem Rahmen in Satz 1.51 nachgeliefert.

**Satz 1.34 (Poincarésche Ungleichung)** *Es sei  $G$  in einer Richtung des  $\mathbb{R}^n$  beschränkt. Dann gibt es eine von  $G$  abhängige Konstante  $c_P$ , so dass für alle  $v \in X$  gilt*

$$\int_G v(x)^2 dx \leq c_P^2 \int_G |\nabla v(x)|^2 dx. \tag{1.19}$$

Die Beschränktheit von  $I$  nach unten folgt dann so:

$$I(v) \geq \frac{1}{2} \int_G |\nabla v|^2 - \left( \int_G f^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_G v^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2} \int_G |\nabla v|^2 - \left( \int_G f^2 \right)^{\frac{1}{2}} c_P \left( \int_G |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die einfache Youngsche Ungleichung (siehe Übung)

**Lemma 1.35**

$$|ab| \leq \frac{\epsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\epsilon} b^2, \quad \epsilon > 0 \tag{1.20}$$

erlaubt es uns weiter nach unten abzuschätzen.

$$I(v) \geq \frac{1}{2}(1 - \epsilon) \int_G |\nabla v|^2 - \frac{c_P}{2\epsilon} \int_G f^2.$$

Die Wahl  $\epsilon = \frac{1}{2}$  ergibt dann z. B.

$$I(v) \geq \frac{1}{4} \int_G |\nabla v|^2 - c_P \int_G f^2 \geq -c_P \int_G f^2,$$

also die Beschränktheit von  $I$  unabhängig von  $v$  nach unten. (Auch die Wahl  $\epsilon = 1$  hätte dies ergeben.) Demnach ist nun  $d \in \mathbb{R}$ .

3. Schritt: Nach der Definition des Infimums gibt es eine Folge  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ,  $v_m \in X$ , die Minimalfolge genannt wird, mit der Eigenschaft

$$I(v_m) \rightarrow d \ (m \rightarrow \infty).$$

4. Schritt: Die Minimalfolge ist eine Cauchyfolge. Da wir nun von Konvergenz in  $X$  sprechen wollen, müssen wir eine Norm auf  $X$  einführen. Wir wählen eine dem Problem angepasste Norm, nämlich

$$\|v\|_X = \left( \int_G v^2 + \int_G |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.21}$$

Damit ist nun  $(X, \|\cdot\|_X)$  ein normierter Raum und wir können von Konvergenz und Cauchyfolgen in  $X$  sprechen. Es ist nun

$$\begin{aligned} \int_G |\nabla(v_m - v_l)|^2 &= \int_G |\nabla v_m|^2 + \int_G |\nabla v_l|^2 - 2 \int_G \nabla v_m \cdot \nabla v_l \\ &= 2 \int_G |\nabla v_m|^2 + 2 \int_G |\nabla v_l|^2 - 4 \int_G \left| \nabla \left( \frac{v_m + v_l}{2} \right) \right|^2 \\ &= 2 \left( 2I(v_m) + 2 \int_G f v_m + 2I(v_l) + 2 \int_G f v_l \right) - 4 \left( 2I\left(\frac{v_m + v_l}{2}\right) + 2 \int_G f \frac{v_m + v_l}{2} \right) \\ &= 4 \left( I(v_m) + I(v_l) - 2I\left(\frac{v_m + v_l}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

Weil die Funktion  $\frac{1}{2}(v_m + v_l)$  in  $X$  liegt, folgt  $I(\frac{1}{2}(v_m + v_l)) \geq d$  und demnach

$$\int_G |\nabla(v_m - v_l)|^2 \leq 4(I(v_m) + I(v_l) - 2d).$$

Wegen  $\lim_{m \rightarrow \infty} I(v_m) = \lim_{l \rightarrow \infty} I(v_l) = d$  konvergiert die rechte Seite in dieser Ungleichung für  $m, l \rightarrow \infty$  gegen Null, und wir erhalten schließlich

$$\int_G |\nabla(v_m - v_l)|^2 \rightarrow 0, \quad (m, l \rightarrow \infty).$$

Wir verwenden noch einmal die Poincarésche Ungleichung und haben dann nachgewiesen, dass  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in dem normierten Raum  $X$  ist. Wir fassen dies zusammen.

**Satz 1.36** Eine Minimalfolge für  $I$  auf  $X$  ist eine Cauchyfolge in  $X$ .

Leider können wir den 5. Schritt der Konvergenz dieser Cauchyfolge gegen ein Element  $u \in X$  nicht vollziehen, denn es zeigt sich, dass der normierte Raum  $(X, \|\cdot\|_X)$  nicht vollständig, also kein Banachraum ist (siehe Übung).

**Beispiel 1.37** Sei  $G = (a, b)$ ,  $-\infty < a < b < \infty$ . Durch  $X = \{v \in C^1([a, b]) \mid v(a) = v(b) = 0\}$  mit  $\|v\|_X = \left(\int_a^b v(x)^2 + v'(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ .  $X$  ist mit dieser Norm nicht vollständig.

Zwar könnten wir  $X$  mit der  $C^1(\overline{G})$ -Norm versehen und damit zu einem Banachraum machen, jedoch könnten wir dann kaum direkt aus dem Variationsproblem nachweisen, dass eine Minimalfolge eine Cauchyfolge in diesem neuen Raum ist. Das liegt daran, dass die  $C^1$ -Norm dem Funktional nicht angepasst ist.

Der Wunsch den 5. Schritt im Nachweis der Existenz einer Lösung des Variationsproblems zu vollziehen ist nun der Grund für die Einführung adäquater Räume, der Sobolevräume im nächsten Paragraphen. Der dort eingeführte Raum  $\dot{H}^1(G)$  entsteht durch eine abstrakte Vervollständigung des Raums  $X$  in der Norm (1.21). Man kann die Einführung dieser Räume auch so verstehen, dass die Lösungen des Variationsproblems eben gerade in diesen Räumen liegen und nicht in „stärkeren“ Funktionenräumen.

Außerdem werden wir diskrete Teilräume dieser Räume konstruieren, die ebenfalls nicht Teilräume des klassischen Funktionenraums  $C^1(\overline{G})$  sind.

## 1.8 Sobolevräume

Wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, benötigen wir die Vervollständigung der klassischen  $C^k$ -Funktionenräume in der Integralnorm. Wir wiederholen zunächst die grundlegenden Tatsachen über die  $L^p$ -Räume. Im folgenden ist  $G \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge.

**Definition 1.38** Für  $1 \leq p \leq \infty$  definieren wir

$$\begin{aligned} L^p(G) &= \{u : G \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ ist Lebesgue-messbar und } \|u\|_{L^p(G)} < \infty\}, \\ \|u\|_{L^p(G)} &= \left(\int_G |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{falls } p < \infty, \\ \|u\|_{L^\infty(G)} &= \inf_{\substack{N \subset G \\ N \text{ ist Lebesgue-} \\ \text{Nullmenge}}} \sup_{G \setminus N} |u|. \end{aligned}$$

Zwei Funktionen in  $L^p(G)$  nennen wir gleich, wenn sie sich höchstens auf einer Lebesgue-Nullmenge unterscheiden. Für die Normen schreiben wir auch

$$\|u\|_{L^p(G)} = \|u\|_p,$$

im Fall  $p = 2$  lassen wir den Index  $p$  weg. Außerdem sei

$$L^p_{\text{loc}}(G) = \{u : G \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall G' \subset\subset G, G' \text{ offen: } u|_{G'} \in L^p(G')\}.$$

Aus den Grundvorlesungen in Analysis wissen wir, dass die  $L^p$ -Räume vollständig sind.

**Satz 1.39 (Fischer–Riesz)**  $L^p(G)$  ist mit  $\|\cdot\|_{L^p(G)}$  ein Banachraum.  $L^2(G)$  ist mit dem Skalarprodukt

$$(u_1, u_2)_{L^2(G)} = \int_G u_1 u_2$$

ein Hilbertraum.

Zur Definition der Sobolevräume erweitern wir den Begriff der Ableitung einer Funktion auf sogenannte schwache Ableitungen oder Distributionsableitungen.

**Definition 1.40** Es sei  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$  ein Multiindex,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ . Eine Funktion  $u \in L^1_{\text{loc}}(G)$  besitzt die schwache Ableitung  $v_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(G)$ , wenn für alle Testfunktionen  $\varphi \in C^\infty_0(G)$  die Gleichung

$$\int_G u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_G v_\alpha \varphi$$

erfüllt ist. Wir schreiben dann

$$v_\alpha = D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Dabei ist

$$C^\infty_0(G) = \{\varphi \in C^\infty(G) \mid \text{supp } \varphi \text{ ist kompakt und } \subset G\}, \quad \text{supp } \varphi = \overline{\{x \in G \mid \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Der Nachweis, dass klassische Ableitungen, wenn sie existieren, auch schwache Ableitungen sind, ist nicht schwierig. Mehr Informationen über schwache Ableitungen findet man in dem Buch von H. W. Alt.

**Beispiel 1.41** Die im Nullpunkt nicht differenzierbare Funktion  $u(x) = |x|$  besitzt auf  $G = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$  eine schwache Ableitung (hier mit  $'$  bezeichnet).  $u'(x) = \text{sign}(x)$ . Wie man sie in  $x = 0$  definiert ist gleichgültig, da ein Punkt eine Lebesgue-Nullmenge ist.

**Beispiel 1.42** Wir interessieren uns dafür, ob, bzw. für welche  $s \in \mathbb{R}$ , die Funktion  $u(x) = |x|^s$  ( $x \in G = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ ) schwache Ableitungen erster Ordnung besitzt. Für  $x \neq 0$  ist  $u$  klassisch stetig differenzierbar. Zunächst ist festzustellen, ob  $u \in L^1(G)$  ist. Die Einführung von Polarkoordinaten in  $\mathbb{R}^n$  liefert

$$\int_{B_1(0)} |u(x)| dx = \int_{B_1(0)} |x|^s dx = \int_0^1 \int_{S^{n-1}} r^{s+n-1} d\sigma dr = |S^{n-1}| \int_0^1 r^{s+n-1} dr < \infty,$$

falls  $s + n - 1 > -1$ , d. h.  $s > -n$  ist. Sei im folgenden also  $s > -n$ . Für  $x \neq 0$  ist mit  $\alpha = e_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ )

$$(D^\alpha u)(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = s|x|^{s-2} x_i.$$

Wir vermuten, daß dies für geeignete  $s$  auch eine schwache Ableitung ist. Dazu seien  $\varphi \in C^\infty_0(B_1(0))$  und  $0 < \varepsilon < 1$ .

$$\int_{B_1(0)} u \varphi_{x_i} = \int_{B_\varepsilon(0)} u \varphi_{x_i} + \int_{B_1(0) \setminus \overline{B_\varepsilon(0)}} u \varphi_{x_i}. \tag{1.22}$$

Der Gaußsche Integralsatz liefert für das zweite Integral wegen  $\varphi|_{\partial B_1(0)} = 0$

$$\begin{aligned} \int_{B_1(0) \setminus \overline{B_\varepsilon(0)}} u \varphi_{x_i} &= \int_{\partial(B_1(0) \setminus \overline{B_\varepsilon(0)})} u \varphi \nu_i - \int_{B_1(0) \setminus \overline{B_\varepsilon(0)}} u_{x_i} \varphi \\ &= - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u \varphi \nu_i - \int_{B_1(0) \setminus \overline{B_\varepsilon(0)}} u_{x_i} \varphi. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Dabei ist unter  $\nu$  immer die äußere Normale an den „Integrationsbereich“ zu verstehen. Wir haben dabei verwendet, daß  $u \in C^1(\overline{B_1(0)} \setminus \{0\})$  ist. Weil wir nun  $\varepsilon \rightarrow 0$  streben lassen wollen, müssen wir sicherstellen, daß  $u_{x_i} \in L^1(B_1(0))$  ist. Es ist aber

$$|u_{x_i}(x)| \leq s|x|^{s-1},$$

und demnach ist  $|u_{x_i}|$  integrierbar, falls  $s - 1 > -n$ , d. h.  $s > 1 - n$  ist. Also existieren in diesem Fall die Grenzwerte der Volumenintegrale in (1.23) für  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

$$\int_{B_1(0)} u \varphi_{x_i} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u \varphi \nu_i - \int_{B_1(0)} u_{x_i} \varphi.$$

Daß der Grenzwert des Oberflächenintegrals Null ist, sieht man so:

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x) \varphi(x) \nu_i(x) d\sigma_x \right| \leq \max_{B_1(0)} |\varphi| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |u(x)| d\sigma_x$$

und

$$\int_{\partial B_\varepsilon(0)} |u(x)| d\sigma_x = \int_{S^{n-1}} \varepsilon^{s+n-1} d\sigma = |S^{n-1}| \varepsilon^{s+n-1}$$

konvergiert gegen Null für  $\varepsilon \rightarrow 0$ , da  $s > 1 - n$  ist.

Wir fassen zusammen: Die Funktion  $u(x) = |x|^s$  ( $x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ ) besitzt die schwache Ableitung  $u_{x_i}(x) = s|x|^{s-2}x_i$ , falls  $s > 1 - n$  ist.

Nun definieren wir die Räume, die sowohl für die Analysis als auch für die Numerik partieller Differentialgleichungen wichtige Hilfsmittel sind.

**Definition 1.43 (Sobolevräume)** Für  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  und  $p \in [1, \infty]$  definieren wir

$$H^{m,p}(G) = \{u \in L^p(G) \mid u \text{ besitzt schwache Ableitungen } D^\alpha u \in L^p(G) \text{ für } 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

$$\|u\|_{H^{m,p}(G)} = \left( \sum_{|\alpha|=0}^m \|D^\alpha u\|_{L^p(G)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ falls } p < \infty,$$

$$\|u\|_{H^{m,\infty}(G)} = \sum_{|\alpha|=0}^m \|D^\alpha u\|_{L^\infty(G)}.$$

Außerdem vereinbaren wir folgende Schreibweisen:

$$|u|_{H^{m,p}(G)} = \left( \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(G)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ falls } p < \infty,$$

$$|u|_{H^{m,\infty}(G)} = \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(G)},$$

$$H^m(G) = H^{m,2}(G).$$

Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, schreiben wir auch

$$\|u\|_{m,p} = \|u\|_{H^{m,p}(G)}, \quad |u|_{m,p} = |u|_{H^{m,p}(G)},$$

$$\|u\|_m = \|u\|_{H^m(G)}, \quad |u|_m = |u|_{H^m(G)}.$$

Nach Definition ist  $H^{0,p}(G) = L^p(G)$ . Der Sobolevraum  $H^{m,p}(G)$  ist also so etwas wie „ $L^p(G)$  mit schwachen Ableitungen bis zur Ordnung  $m$ , die in  $L^p(G)$  liegen“.

**Beispiel 1.44** Führen wir nun das Beispiel 1.42 fort, indem wir untersuchen, ob  $u \in H^{1,p}(B_1(0))$  ist. Dazu ist zunächst nachzusehen, ob  $u \in L^p(B_1(0))$  für ein  $1 \leq p < \infty$  ist. Wegen

$$|u(x)|^p \leq |x|^{sp}$$

ist  $u \in L^p(B_1(0))$ , wenn  $sp > -n$  ist. Für die schwache Ableitung gilt

$$|u_{x_i}(x)|^p \leq s^p |x|^{p(s-1)},$$

d. h.  $u_{x_i} \in L^p(B_1(0))$ , falls  $p(s-1) > -n$  ist. Also ist  $u \in H^{1,p}(B_1(0))$ , wenn  $s > 1 - \frac{n}{p}$  gilt.

Funktionen aus Sobolevräumen sind im allgemeinen nicht stetig. Ein prominentes Beispiel ist das folgende.

**Beispiel 1.45**  $u(x) = \log |\log |x||$  ( $x \in G = B_{\frac{1}{2}}(0) \subset \mathbb{R}^2$ ). Es ist  $u \in H^{1,2}(G)$ , aber  $u \notin C^0(\overline{G})$ .

Man überlege sich, daß man aus diesem Beispiel Funktionen  $v \in H^{1,2}(G)$  mit abzählbar vielen Singularitäten basteln kann:

$$v(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j u(x - \delta_j).$$

Die Sobolevräume  $H^{m,p}(G)$  wurden definiert, weil die klassischen Funktionenräume in der entsprechenden Integralnorm nicht vollständig sind. Deshalb ist der folgende Satz der für uns wichtigste.

**Satz 1.46**  $H^{m,p}(G)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$  ist ein Banachraum.  $H^m(G)$  ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^m(G)} = \sum_{|\alpha|=0}^m (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(G)}.$$

*Beweis.* Der Beweis ist eine direkte Folge aus dem Satz von Fischer-Riesz (Satz 1.39). Sei also  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $H^{m,p}(G)$ . Wegen

$$\|D^\alpha v_k - D^\alpha v_l\|_{L^p(G)} \leq \|v_k - v_l\|_{H^{m,p}(G)}$$

für jeden Multiindex  $0 \leq |\alpha| \leq m$  ist  $(D^\alpha v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $L^p(G)$ . Nach Satz 1.39 gibt es einen Grenzwert  $v^\alpha \in L^p(G)$  mit  $\|D^\alpha v_k - v^\alpha\|_{L^p(G)} \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Definiere  $v = v^0$ . Dann ist zu zeigen, dass  $v$  schwache Ableitungen  $D^\alpha v$  besitzt und  $D^\alpha v = v^\alpha$  ist. Dazu sei  $\varphi \in C_0^\infty(G)$ . Weil  $v_k$  eine schwache Ableitung  $D^\alpha v_k \in L^p(G)$  besitzt gilt

$$\begin{aligned} \int_G v D^\alpha \varphi &= \int_G (v - v_k) D^\alpha \varphi + \int_G v_k D^\alpha \varphi \\ &= \int_G (v - v_k) D^\alpha \varphi + (-1)^{|\alpha|} \int_G D^\alpha v_k \varphi \\ &= \int_G (v - v_k) D^\alpha \varphi + (-1)^{|\alpha|} \int_G (D^\alpha v_k - v^\alpha) \varphi + (-1)^{|\alpha|} \int_G v^\alpha \varphi. \end{aligned}$$

Mit der Hölderschen Ungleichung erhält man dann mit dem dualen Exponenten  $p'$ ,  $p^{-1} + (p')^{-1} = 1$ ,

$$\left| \int_G v D^\alpha \varphi - (-1)^{|\alpha|} \int_G v^\alpha \varphi \right| \leq \|v - v_k\|_{L^p(G)} \|D^\alpha \varphi\|_{L^{p'}(G)} + \|v^\alpha - D^\alpha v_k\|_{L^p(G)} \|\varphi\|_{L^{p'}(G)} \rightarrow 0$$

für  $k \rightarrow \infty$ . Das heißt, dass

$$\int_G v D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_G v^\alpha \varphi$$

für alle  $\varphi \in C_0^\infty(G)$  gilt, also  $v^\alpha = D^\alpha v$  ist. □

Wir befassen uns mit Randwertproblemen für partielle Differentialgleichungen. Wir müssen also einen Weg finden, um Randwerte für  $H^{m,p}(G)$ -Funktionen im verallgemeinerten Sinn zu definieren. Dies geschieht nun. Die Einführung solcher verallgemeinerter 0-Randwerte ist zunächst ziemlich abstrakt, wird aber später als sehr sinnvoll erkannt werden.

**Definition 1.47** Für  $1 \leq p < \infty$ ,  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  sei

$$\dot{H}^{m,p}(G) = \overline{C_0^m(G)}^{\|\cdot\|_{H^{m,p}(G)}}.$$

Für  $\dot{H}^{m,2}(G)$  schreiben wir auch  $\dot{H}^m(G)$ . Dabei ist  $C_0^m(G) = \{\varphi \in C^m(G) \mid \text{supp } \varphi \text{ ist kompakt und } \subset G\}$ .

Das bedeutet, dass  $\dot{H}^{m,p}(G)$  aus den Funktionen besteht (siehe nächster Satz), die sich in der  $H^{m,p}(G)$ -Norm durch Funktionen aus  $C_0^m(G)$  approximieren lassen. Den folgenden Satz beweist man leicht selbst. Man beachte, dass zunächst die Elemente von  $\dot{H}^{m,p}(G)$  als  $H^{m,p}(G)$ -Funktionen erkannt werden müssen.

**Satz 1.48**  $\dot{H}^{m,p}(G)$  ist für  $1 \leq p < \infty$  ein abgeschlossener Teilraum von  $H^{m,p}(G)$ , also wieder ein Banachraum.

Demnach sind die Normen in  $\dot{H}^{m,p}(G)$  und  $H^{m,p}(G)$  dieselben.

Aus praktischen Gründen führen wir noch eine Bezeichnung für den Dualraum von  $\dot{H}^{m,p}(G)$  ein. Der Dualraum eines Raums  $X$  besteht aus den stetigen linearen Funktionalen  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definition 1.49** Sei  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Dann schreiben wir

$$H^{-m,p'}(G) = \left( \dot{H}^{m,p}(G) \right)', \quad \|f\|_{H^{-m,p'}(G)} = \sup_{v \in \dot{H}^{m,p}(G) \setminus \{0\}} \frac{|f(v)|}{\|v\|_{H^{m,p}(G)}}.$$

Mit dieser Bezeichnung, die wir wie üblich durch die Abkürzung

$$H^{-m}(G) = \left( \dot{H}^m(G) \right)'$$

ergänzen, ist es uns möglich, Differentialgleichungen theoretisch und numerisch zu lösen, deren rechte Seiten Funktionale und keine Funktionen sind. Dazu gehören z. B. rechte Seiten, die als Ableitungen von  $L^q(G)$ -Funktionen interpretiert werden können. Dies zeigt das folgende

**Beispiel 1.50** Sei  $g \in L^{p'}(G)$  und  $j \in \{1, \dots, n\}$  fest gewählt. Dann ist durch

$$f(v) = - \int_G D_j v g$$

ein  $f \in H^{-m,p'}(G)$  gegeben.  $f$  ist offensichtlich linear. Wir zeigen, daß  $f$  beschränkt ist und damit auch  $H^{m,p}(G)$  nach  $\mathbb{R}$  abbildet. Für jedes  $v \in H^{m,p}(G)$  gilt:

$$|f(v)| \leq \int_G |D_j v| |g| \leq \|D_j v\|_{L^p(G)} \|g\|_{L^{p'}(G)} \leq \|v\|_{H^{m,p}(G)} \|g\|_{L^{p'}(G)}.$$

Also ist  $\|f\|_{H^{-m,p'}(G)} \leq \|g\|_{L^{p'}(G)}$ .

Nachzutragen ist noch die Poincarésche Ungleichung, die wir nun gleich für  $\dot{H}^{1,p}(G)$ -Funktionen beweisen. Dabei kümmern wir uns zunächst nicht um die optimale Konstante in dieser Ungleichung und merken uns nur, daß eine Abhängigkeit vom Durchmesser des Gebietes typisch ist.

**Satz 1.51 (Poincarésche Ungleichung)** Es gibt eine Konstante  $c_P \leq 2d$ , so daß für alle  $v \in \dot{H}^{1,p}(G)$  gilt:

$$\|v\|_{L^p(G)} \leq c_P \|\nabla v\|_{L^p(G)} \tag{1.24}$$

Dabei ist  $d$  der Durchmesser von  $G$  in einer beliebigen Richtung.

*Beweis.* Es reicht, die Abschätzung (1.24) für  $v \in C_0^1(G)$  nachzuweisen, denn zu  $v \in \dot{H}^{1,p}(G)$  wähle gemäß Definition 1.47 eine Folge  $v_j \in C_0^1(G)$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) mit  $\|v - v_j\|_{H^{1,p}(G)} \rightarrow 0$  ( $j \rightarrow \infty$ ). Ist (1.24) für  $C_0^1(G)$ -Funktionen bewiesen, so folgt:

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^p(G)} &\leq \|v_j\|_{L^p(G)} + \|v_j - v\|_{L^p(G)} \leq c_P \|\nabla v_j\|_{L^p(G)} + \|v_j - v\|_{L^p(G)} \\ &\leq c_P \|\nabla v\|_{L^p(G)} + c_P \|\nabla(v_j - v)\|_{L^p(G)} + \|v_j - v\|_{L^p(G)} \\ &\rightarrow c_P \|\nabla v\|_{L^p(G)} \quad (j \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Ist nun also  $v \in C_0^1(G)$ , so setze  $v$  durch 0 auf den  $\mathbb{R}^n$  fort:

$$\bar{v}(x) := \begin{cases} v(x) & (x \in G) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n \setminus G). \end{cases}$$

Ist z. B.  $G \subset [-d, d] \times \mathbb{R}^{n-1}$ , so folgt wegen  $\bar{v} \in C^1(\mathbb{R}^n)$

$$\bar{v}(x) = \int_{-d}^{x_1} \bar{v}_{x_1}(s, x_2, \dots, x_n) ds,$$

also mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  auch

$$\begin{aligned} |\bar{v}(x)|^p &\leq \left( \int_{-d}^{x_1} |\bar{v}_{x_1}(s, x_2, \dots, x_n)| ds \right)^p \leq \int_{-d}^{x_1} |\bar{v}_{x_1}(s, x_2, \dots, x_n)|^p ds \left( \int_{-d}^{x_1} 1^{p'} ds \right)^{\frac{p}{p'}}, \\ |\bar{v}(x_1, \dots, x_n)|^p &\leq (2d)^{\frac{p}{p'}} \int_{-d}^{x_1} |\bar{v}_{x_1}(s, x_2, \dots, x_n)|^p ds, \\ \int_{-d}^{x_1} |\bar{v}(x_1, \dots, x_n)|^p dx_1 &\leq (2d)^{\frac{p}{p'}+1} \int_{-d}^{x_1} |\bar{v}_{x_1}(s, x_2, \dots, x_n)|^p ds \end{aligned}$$

und Integration über die restlichen Richtungen  $x_2, \dots, x_n$  liefert

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\bar{v}(x)|^p dx \leq (2d)^{\frac{p}{p'}+1} \int_{\mathbb{R}^n} |\bar{v}_{x_1}(x)|^p dx$$

oder

$$\left( \int_G |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2d \left( \int_G |v_{x_1}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

## 1.9 Der Laplace-Operator auf Sobolevräumen

Nun sind alle Räume bekannt, um den Laplace-Operator auf Sobolevräumen zu untersuchen. Dabei sind für uns zunächst nur die Räume  $\dot{H}^1(G)$  und  $H^{-1}(G)$  wichtig. Im folgenden sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  stets ein beschränktes Gebiet.

**Lemma 1.52** *Durch*

$$(-\Delta u)(\varphi) = \int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi, \quad (\varphi \in \dot{H}^1(G)) \quad (1.25)$$

ist eine Abbildung  $-\Delta : \dot{H}^1(G) \rightarrow H^{-1}(G)$  definiert.

*Beweis.* Es ist zu zeigen, dass für  $u \in \dot{H}^1(G)$  das Bild  $-\Delta u \in H^{-1}(G)$  ist. Für  $\varphi \in \dot{H}^1(G)$  hat man

$$|(-\Delta u)(\varphi)| \leq \int_G |\nabla u| |\nabla \varphi| \leq \|\nabla u\|_{L^2(G)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(G)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(G)} \|\varphi\|_{H^1(G)} < \infty \quad (1.26)$$

Die Linearität von  $-\Delta u$  ist klar. Aus der Abschätzung (1.26) folgt dann die Stetigkeit von  $-\Delta u$ . □

**Satz 1.53** *Zu jedem  $f \in H^{-1}(G)$  gibt es ein  $u \in \dot{H}^1(G)$  mit  $-\Delta u = f$ .*

*Beweis.* Den Beweis haben wir eigentlich schon in Paragraph 1.7 erledigt. Nur verwenden wir nun von Beginn an den Raum  $X = \dot{H}^1(G)$ , in dem dann unsere Cauchyfolge konvergieren wird. Wie dort setzen wir  $d = \inf_{v \in X} I(v)$  mit dem Funktional

$$I(v) = \frac{1}{2} \int_G |\nabla v|^2 - f(v).$$

Es ist  $d < \infty$ , weil  $0 \in X$ . Die Beschränktheit von unten sieht etwas anders aus. Wir verwenden die Definition der Norm im Dualraum und erhalten mit der Poincaréschen Ungleichung

$$\begin{aligned} I(v) &\geq \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L^2(G)}^2 - |f(v)| \geq \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L^2(G)}^2 - \|f\|_{H^{-1}(G)} \|v\|_{H^1(G)} \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L^2(G)}^2 - \|f\|_{H^{-1}(G)} \sqrt{1 + c_P^2} \|\nabla v\|_{L^2(G)} \geq \frac{1}{2} (1 - \varepsilon) \|\nabla v\|_{L^2(G)}^2 - \frac{1 + c_P^2}{2\varepsilon} \|f\|_{H^{-1}(G)}^2. \end{aligned}$$

Eine geeignete Wahl von  $\varepsilon$  liefert die Beschränktheit von  $I$  von unten und demnach  $d > -\infty$ .

Wie in Paragraph 1.7 wählen wir nun eine Minimalfolge  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$  mit  $I(v_m) \rightarrow d$  für  $m \rightarrow \infty$  und weisen nach, dass sie eine Cauchyfolge in  $X$  ist. Dies ist fast wörtlich derselbe Beweis wie in Paragraph 1.7. Nur ist  $\int_G f v$  durch  $f(v)$  zu ersetzen. Nun können wir fortfahren mit dem

5. Schritt: Da  $X = \dot{H}^1(G)$  nach Satz 1.48 vollständig ist, gibt es ein  $u \in X$ , so dass  $\|v_m - u\|_X \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$ .

6. Schritt:  $I(u) = d$ . Dazu ist zu zeigen, dass  $I$  stetig ist. Dies geht so:

$$\begin{aligned} |I(u) - I(v_m)| &= \left| \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(G)}^2 - f(u) - \frac{1}{2} \|\nabla v_m\|_{L^2(G)}^2 + f(v_m) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left| \|\nabla u\|_{L^2(G)}^2 - \|\nabla v_m\|_{L^2(G)}^2 \right| + |f(u) - f(v_m)| \\ &\leq \frac{1}{2} (\|\nabla u\|_{L^2(G)} + \|\nabla v_m\|_{L^2(G)}) \|\nabla(u - v_m)\|_{L^2(G)} + \|f\|_{H^{-1}(G)} \|u - v_m\|_{H^1(G)}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung konvergiert gegen Null, denn Cauchyfolgen sind beschränkt,  $\|\nabla v_m\|_{L^2(G)} \leq \|v_m\|_{H^1(G)} \leq C$  und  $\|u - v_m\|_{H^1(G)} \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$ .

7. Schritt: Wie im Beweis von Satz 1.32 erhält man dann für das Minimum  $u$  die gewünschte Gleichung

$$\int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi = f(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \dot{H}^1(G),$$

was ja gerade  $-\Delta u = f$  bedeutet. □

Wir halten den wichtigen Begriff der schwachen Lösung in einer eigenen Definition fest.

**Definition 1.54**  $u$  heißt schwache Lösung von

$$-\Delta u = f \text{ in } G, \quad u = 0 \text{ auf } \partial G,$$

falls

$$u \in \dot{H}^1(G) \text{ und } \int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi = f(\varphi)$$

für alle  $\varphi \in \dot{H}^1(G)$  gilt.

Damit sind die Abbildungseigenschaften von  $-\Delta$  fast vollständig geklärt.

**Satz 1.55** Die Abbildung  $-\Delta : \dot{H}^1(G) \rightarrow H^{-1}(G)$  ist linear, bijektiv und stetig. Es gilt mit einer nur von  $G$  abhängenden positiven Konstanten  $c_G$

$$c_G \|u\|_{H^1(G)} \leq \|-\Delta u\|_{H^{-1}(G)} \leq \|u\|_{H^1(G)} \tag{1.27}$$

für jedes  $u \in \dot{H}^1(G)$ . In der üblichen Schreibweise für lineare beschränkte Operatoren impliziert dies, dass  $-\Delta \in L(\dot{H}^1(G), H^{-1}(G))$  ist.

*Beweis.* Beginnen wir mit der Abschätzung nach unten, die dann die Injektivität der Abbildung  $-\Delta$  ergibt. Es ist für  $u \neq 0$

$$\|-\Delta u\|_{H^{-1}(G)} = \sup_{\varphi \in H^1(G) \setminus \{0\}} \frac{(-\Delta u)(\varphi)}{\|\varphi\|_{H^1(G)}} \geq \frac{(-\Delta u)(u)}{\|u\|_{H^1(G)}} = \frac{\|\nabla u\|_{L^2(G)}^2}{\|u\|_{H^1(G)}}$$

und mit der Poincaréschen Ungleichung weiter mit  $\alpha = \frac{c_P^2}{1+c_P^2}$ ,

$$\geq \frac{\alpha \|\nabla u\|_{L^2(G)}^2 + (1-\alpha) \|\nabla u\|_{L^2(G)}^2}{\|u\|_{H^1(G)}} \geq \frac{\frac{\alpha}{c_P^2} \|u\|_{L^2(G)}^2 + (1-\alpha) \|\nabla u\|_{L^2(G)}^2}{\|u\|_{H^1(G)}} \geq \frac{1}{1+c_P^2} \|u\|_{H^1(G)}.$$

Die Abschätzung nach oben ist klar. □

Zum Abschluss dieses Paragraphen soll veranschaulicht werden, dass Funktionen aus einem Sobolevraum in einer Raumdimension stetig sind. Das folgende Lemma dient gleichzeitig dazu zu zeigen, wie man sogenannte Sobolevsche Einbettungssätze beweist und wie diese zu interpretieren sind. Es handelt sich hier um den einfachsten Fall eines solchen Einbettungssatzes. Allgemeinere Resultate werden wir später herleiten.

**Lemma 1.56** Sei  $-\infty < a < b < \infty$  und  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ . Dann gibt es zu  $u \in \dot{H}^1(I)$  eine Funktion  $\tilde{u} \in C^0(\bar{I})$  mit  $u = \tilde{u}$  fast überall in  $I$  und  $\tilde{u}(a) = \tilde{u}(b) = 0$ . Außerdem gilt

$$\|\tilde{u}\|_{C^0(\bar{I})} \leq \sqrt{b-a} \|u\|_{H^1(I)}.$$

*Beweis.* 1. Schritt: Für eine klassisch stetig differenzierbare Funktion  $v \in C_0^1(I)$  hat man für jeden Punkt  $x \in I$

$$|v(x)| = |v(x) - v(a)| = \left| \int_a^x v'(s) ds \right| \leq \int_a^x |v'(s)| ds \leq \sqrt{b-a} \left( \int_a^x (v'(s))^2 ds \right)^{\frac{1}{2}},$$

also folgt für die Maximumnorm  $\|v\|_{C^0([a,b])} = \max_{x \in [a,b]} |v(x)| \leq \sqrt{b-a} \|v\|_{H^1((a,b))}$ .

2. Schritt: Zu  $u \in \dot{H}^1(I)$  gibt es nach Definition eine Folge  $u_m \in C_0^1(I)$  mit  $\|u_m - u\|_{H^1(I)} \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$ . Aus dem ersten Schritt angewandt auf die Funktion  $v = u_m - u_l$  erhält man

$$\|u_m - u_l\|_{C^0([a,b])} \leq \sqrt{b-a} \|u_m - u_l\|_{H^1((a,b))}.$$

Also ist  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  auch eine Cauchyfolge im Banachraum  $C^0(\bar{I})$ . Aus den Grundvorlesungen wissen wir, dass es dann eine Funktion  $\tilde{u} \in C^0(\bar{I})$  gibt, mit  $\|u_m - \tilde{u}\|_{C^0(\bar{I})} \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$ .

3. Schritt:  $\tilde{u} = u$  fast überall, denn

$$\|\tilde{u} - u\|_{L^2(I)} \leq \|\tilde{u} - u_m\|_{L^2(I)} + \|u_m - u\|_{L^2(I)} \leq \sqrt{b-a} \|\tilde{u} - u_m\|_{C^0(\bar{I})} + \|u_m - u\|_{H^1(I)} \rightarrow 0$$

für  $m \rightarrow \infty$ . Also ist  $\|\tilde{u} - u\|_{L^2(I)} = 0$ .

4. Schritt: Einbettungsabschätzung:

$$\|\tilde{u}\|_{C^0(\bar{I})} = \lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_{C^0(\bar{I})} \leq \sqrt{b-a} \lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_{H^1(I)} = \sqrt{b-a} \|u\|_{H^1(I)}.$$

Dies gilt wegen der Stetigkeit der Norm in einem normierten Raum.

5. Schritt: Randwerte:  $\tilde{u}(a) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m(a) = 0$  und dasselbe für  $b$ . □

Dieses Resultat besagt, dass wir in einer Raumdimension eine  $H^1(G)$ -Funktion  $u$  nur auf einer Menge vom Lebesguemaß Null abändern müssen, um eine stetige Funktion  $\tilde{u}$  zu erhalten. Beachten wir, dass Funktionen in Sobolevräumen sowieso nur bis auf Nullmengen erklärt sind, so ist also in diesem Sinn  $\tilde{u} = u$ .

## 2 Finite Elemente

### 2.1 Das Ritz–Galerkin–Verfahren

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir gesehen, daß die Lösung  $u$  der Poissongleichung zu Nullrandwerten durch das Minimieren des Funktionals

$$I(v) = \frac{1}{2} \int_G |\nabla v|^2 - f(v) \quad (2.1)$$

über dem Sobolevraum  $X = \mathring{H}^1(G)$  gefunden werden konnte:

$$d = I(u) = \inf_{v \in X} I(v).$$

Dieses  $u$  ist dann eine schwache Lösung gemäß Definition 1.54.

Die Idee des Ritz–Galerkin–Verfahrens ist nun ganz einfach. Man wähle einen endlichdimensionalen Teilraum  $X_h \subset X$  und löse das Variationsproblem ein  $u_h \in X_h$  zu finden, so daß

$$d_h = I(u_h) = \inf_{v_h \in X_h} I(v_h). \quad (2.2)$$

(Die Wahl geeigneter  $X_h$  mit praktisch gut zu verarbeitenden Basen wird Gegenstand der nächsten Paragraphen sein.) Offensichtlich ist  $I(u) \leq I(u_h)$ . Ist  $u_h \in X_h$  eine Lösung des Variationsproblems (2.2), so folgt wie im unendlichdimensionalen Fall wegen  $I(u_h) \leq I(u_h + \varepsilon\varphi_h)$  für jedes  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  und jedes  $\varphi_h \in X_h$  die „schwache diskrete Differentialgleichung“

$$\int_G \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_h = f(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in X_h. \quad (2.3)$$

Fassen wir dies in einem Lemma zusammen.

**Lemma 2.1** *Es sei  $f \in H^{-1}(G)$  zu dem beschränkten Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$ . Ist nun  $X_h \subset X = \mathring{H}^1(G)$  ein endlichdimensionaler Teilraum, dann gibt es genau eine diskrete Lösung  $u_h \in X_h$ , so dass (2.2) gilt, und*

$$\int_G \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_h = f(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in X_h. \quad (2.4)$$

Ausserdem ist  $d_h \geq d$ .

*Beweis.* Der Beweis ist wörtlich derselbe wie der Beweis zu Satz 1.53. Nur ist der Beweis einfacher, da wir in dem endlichdimensionalen Raum  $X_h$  minimieren und ein solcher Raum immer vollständig ist.  $\square$

Die diskrete Differentialgleichung (2.4) ist ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von  $u_h \in X_h$ . Um dies einzusehen stellen wir  $u_h$  durch eine Basis dar. Sei

$$X_h = \text{span} \{\phi_1, \dots, \phi_N\}.$$

Demnach lässt sich  $u_h$  schreiben als

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x), \quad x \in G \quad (2.5)$$

mit zu bestimmenden reellen Zahlen  $u_j$ . Aus diesen Koeffizienten bilden wir den Vektor

$$\underline{u} = (u_1, \dots, u_N).$$

Die Gleichung (2.4) ist äquivalent zu

$$\int_G \nabla u_h \cdot \nabla \phi_i = f(\phi_i) \quad (i = 1, \dots, N).$$

Mit der Darstellung (2.5) ist dies äquivalent zu

$$\sum_{j=1}^N u_j \int_G \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i = f(\phi_i), \quad (i = 1, \dots, N), \quad (2.6)$$

und wenn wir die sogenannte Steifigkeitsmatrix mit

$$S_{ij} = \int_G \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i, \quad (i, j = 1, \dots, N) \quad (2.7)$$

bezeichnen und die rechte Seite mit

$$\underline{f} = (f_1, \dots, f_N), \quad f_i = f(\phi_i) \quad (i = 1, \dots, N), \quad (2.8)$$

so ist (2.4) äquivalent zum linearen Gleichungssystem

$$S\underline{u} = \underline{f}.$$

Dieses Gleichungssystem hat nun wichtige Eigenschaften.

**Lemma 2.2** Die Steifigkeitsmatrix  $S$  ist symmetrisch und positiv definit.

*Beweis.* Die Symmetrie ist offensichtlich. Sei  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Setze  $v_h(x) = \sum_{j=1}^N \xi_j \phi_j(x)$  und erhalte

$$S\xi \cdot \xi = \sum_{i,j=1}^N S_{ij} \xi_j \xi_i = \int_G |\nabla v_h|^2 \geq \frac{1}{c_P^2} \int_G v_h^2.$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die Poincarésche Ungleichung verwendet. Offensichtlich ist dieser Ausdruck nicht negativ und gleich Null genau dann, wenn  $v_h = 0$  ist, d. h.  $v_h$  identisch verschwindet. Daraus folgt dann aber, dass  $\xi = 0$  ist.  $\square$

Wegen der besonders einfachen mathematischen Struktur der Diskretisierung können wir den Fehler zwischen kontinuierlicher Lösung und diskreter Lösung leicht abschätzen.

**Satz 2.3** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet,  $f \in H^{-1}(G)$  und  $X_h \subset \dot{H}^1(G)$  ein endlichdimensionaler Teilraum. Ist  $u \in \dot{H}^1(G)$  die kontinuierliche Lösung und  $u_h \in X_h$  die diskrete Lösung, so gilt

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(G)} \leq \inf_{\varphi_h \in X_h} \|\nabla(u - \varphi_h)\|_{L^2(G)}. \quad (2.9)$$

Damit ist die Abschätzung des Fehlers zwischen kontinuierlicher Lösung und diskreter Lösung auf ein Approximationsproblem zurückgeführt - das uns aber noch beträchtliche Arbeit abverlangen wird.

*Beweis.*  $u \in \dot{H}^1(G)$  ist die kontinuierliche Lösung:

$$\int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi = f(\varphi) \quad \forall \varphi \in \dot{H}^1(G). \quad (2.10)$$

$u_h \in X_h$  ist die diskrete Lösung:

$$\int_G \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_h = f(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in X_h. \quad (2.11)$$

Wegen  $X_h \subset \dot{H}^1(G)$  dürfen wir in der ersten Gleichung (3.27) auch diskrete Funktionen  $\varphi = \varphi_h$  als Testfunktionen einsetzen. Wir subtrahieren danach die Gleichungen (3.27) und (2.11) und erhalten die Orthogonalität des Fehlers:

$$\int_G \nabla(u - u_h) \cdot \nabla \varphi_h = 0 \quad \forall \varphi_h \in X_h \quad (2.12)$$

Nun folgt weiter für jedes  $\varphi_h \in X_h$ :

$$\begin{aligned} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(G)}^2 &= \int_G \nabla(u - u_h) \cdot \nabla u - \int_G \nabla(u - u_h) \cdot \nabla u_h \\ &= \int_G \nabla(u - u_h) \cdot \nabla u - \int_G \nabla(u - u_h) \cdot \nabla \varphi_h \\ &= \int_G \nabla(u - u_h) \cdot \nabla(u - \varphi_h) \\ &\leq \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(G)} \|\nabla(u - \varphi_h)\|_{L^2(G)}. \end{aligned}$$

Und das ergibt dann

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(G)} \leq \|\nabla(u - \varphi_h)\|_{L^2(G)}$$

für jedes  $\varphi_h$ , also die Behauptung des Satzes. □

## 2.2 Simplexe

Ziel dieses Abschnitts ist die Konstruktion geeigneter endlichdimensionaler Teilräume  $X_h$ , die auf einer simplizialen Triangulierung des Gebietes  $G$  beruhen. In zwei Raumdimensionen besteht das Rechengitter aus Dreiecken, in drei Raumdimensionen aus Tetraedern.

**Definition 2.4** 1. Für  $s \in \{1, \dots, n\}$  seien  $a_0, \dots, a_s \in \mathbb{R}^n$  derart, daß  $(a_j - a_0)_{j=1, \dots, s}$  linear unabhängig sind. Dann heißt

$$T = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{j=0}^s \lambda_j a_j, \quad 0 \leq \lambda_j, \quad \sum_{j=0}^s \lambda_j = 1\}$$

ein (nicht degeneriertes)  $s$ -dimensionales Simplex im  $\mathbb{R}^n$ . Die Punkte  $a_0, \dots, a_s$  heißen Ecken des Simplex. Sind  $a'_0, \dots, a'_r \in \{a_0, \dots, a_s\}$  ( $r \in \{0, \dots, s\}$ ), so nennt man

$$T' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{j=0}^r \lambda_j a'_j, \quad 0 \leq \lambda_j, \quad \sum_{j=0}^r \lambda_j = 1\}$$

$r$ -dimensionales Seitensimplex von  $T$ . Die eindimensionalen Seitensimplexe heißen Kanten, die null-dimensionalen Ecken.

2. Das Simplex  $T_0$  zu  $a_0 = e_0 := 0, a_j = e_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) nennt man  $n$ -dimensionales Einheitssimplex.

3.  $h(T) = \max\{|a_j - a_k|; (j, k = 0, \dots, s)\}$  heißt Durchmesser des  $s$ -dimensionalen Simplex,  $\rho(T) = 2 \sup\{R \mid B_R(x_0) \subset T\}$  Inkugeldurchmesser; den Quotienten bezeichnen wir mit  $\sigma(T) = \frac{h(T)}{\rho(T)}$ .

In  $\mathbb{R}^2$  ist ein zweidimensionales Simplex das Dreieck mit den Ecken  $a_0, a_1, a_2$ , im  $\mathbb{R}^3$  ist ein dreidimensionales Simplex der Tetraeder mit den Ecken  $a_0, a_1, a_2, a_3$ , sechs eindimensionalen und vier zweidimensionalen Seitensimplexen. Ein  $s$ -dimensionales Simplex besitzt  $\binom{s+1}{r+1}$   $r$ -dimensionale Seitensimplexe. Die Größen  $\lambda_0, \dots, \lambda_s \in [0, 1]$  sind Koordinaten, die dem Simplex besonders gut angepaßt sind. Wir werden oft diese Koordinaten statt der kartesischen verwenden.

**Definition 2.5** Als baryzentrische Koordinaten  $\lambda_0, \dots, \lambda_s$  eines Punktes  $x \in T$  des  $s$ -dimensionalen Simplex  $T$  bezeichnet man die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{j=0}^s \lambda_j a_j = x, \quad \sum_{j=0}^s \lambda_j = 1. \tag{2.13}$$

Der Schwerpunkt  $x_b$  von  $T$  ist durch  $x_b = \frac{1}{s+1} \sum_{j=0}^s a_j$  definiert.

Das Gleichungssystem (2.13) ist für jedes  $x$  eindeutig lösbar. Dass es lösbar ist, folgt daraus, dass  $x \in T$  liegt und der Definition des Simplex  $T$ . Bleibt die Eindeutigkeit nachzuweisen. Die folgt aber sofort, da das Gleichungssystem die Form

$$\left( \begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_s \\ | & | & & | \\ 1 & 1 & & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix},$$

hat und für den Rang gilt:

$$\begin{aligned} \text{Rang} \left( \begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_s \\ | & | & & | \\ 1 & 1 & & 1 \end{array} \right) &= \text{Rang} \left( \begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ a_0 & a_1 - a_0 & \cdots & a_s - a_0 \\ | & | & & | \\ 1 & 0 & & 0 \end{array} \right) \\ &= 1 + \text{Rang} \left( \begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ a_1 - a_0 & \cdots & & a_s - a_0 \\ | & | & & | \end{array} \right) = 1 + s. \end{aligned}$$

Wir werden bei Fehlerabschätzungen des öfteren ein gegebenes Simplex auf das Einheits-simplex transformieren. Damit wir dabei die auftretenden Konstanten gut verfolgen können, beweisen wir den folgenden kleinen Hilfssatz.

**Hilfssatz 2.6** *Jedes  $s$ -dimensionale Simplex  $T$  im  $\mathbb{R}^s$  ist affin äquivalent zum Einheits-simplex  $T_0$  der gleichen Dimension. Es gibt genau eine Abbildung*

$$F : T_0 \rightarrow T, \quad F(\bar{x}) = A\bar{x} + b$$

mit einer  $(s, s)$ -Matrix  $A$ ,  $\det A \neq 0$  und einem  $b \in \mathbb{R}^s$ , so daß  $F(e_j) = a_j$  ( $j = 0, \dots, s$ ). Außerdem gelten die Abschätzungen

$$|A| \leq \frac{h(T)}{\rho(T_0)}, \quad |A^{-1}| \leq \frac{h(T_0)}{\rho(T)}, \quad c \rho(T)^s \leq |\det A| \leq \tilde{c} h(T)^s \tag{2.14}$$

mit nur von  $s$  abhängigen Konstanten  $c$  und  $\tilde{c}$ , und man hat außerdem  $|\det A| = \frac{|T|}{|T_0|}$ .

Dabei ist  $|A|$  die zur euklidischen Norm  $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_s^2}$  im  $\mathbb{R}^s$  gehörende Matrixnorm, d. h.  $|A| = \sup_{|e|=1} |Ae|$ , und das bedeutet, daß  $|A| = (\text{größter Eigenwert von } A^t A)^{\frac{1}{2}}$  ist.

*Beweis.*  $\{e_j \mid j = 1, \dots, s\}$  und  $\{a_j - a_0 \mid j = 1, \dots, s\}$  sind Basen des  $\mathbb{R}^s$ .  $A$  sei die Basistransformation:

$$Ae_j = a_j - a_0 \quad (j = 1, \dots, s).$$

Dann leistet

$$F(\bar{x}) = A\bar{x} + a_0$$

das Verlangte.  $F$  ist eindeutig bestimmt, denn aus  $Ae_j + b = A'e_j + b'$  für  $j = 0, \dots, s$  folgt für  $j = 0$  wegen  $e_0 = 0$ , daß  $b = b'$  ist, und demnach  $(A - A')e_j = 0$  für alle  $j = 1, \dots, s$  gilt, woraus wiederum  $A = A'$  folgt.

Es sei  $e \in \mathbb{R}^s$ ,  $|e| = 1$ . Nach Definition von  $\rho(T_0)$  gibt es ein  $x_0 \in T_0$ , so daß  $\overline{B_{\frac{\rho(T_0)}{2}}(x_0)} \subset T_0$  ist. Dann gibt es auch  $x_1, x_2 \in T_0$ , so daß  $x_1 - x_2 = e\rho(T_0)$  gilt. Damit folgt dann

$$|Ae| = |Ax_1 - Ax_2| \rho(T_0)^{-1} \leq h(T)\rho(T_0)^{-1}.$$

Das bedeutet aber gerade, daß

$$|A| \leq h(T)\rho(T_0)^{-1}$$

ist. Genauso folgt die zweite Abschätzung in (2.14). Weiter ist nach der Transformationsregel

$$|T| = \int_T 1 dx = \int_{T_0} |\det A| d\bar{x} = |T_0| |\det A|$$

und demnach  $|\det A| = \frac{|T|}{|T_0|}$ . Das Volumen des  $s$ -dimensionalen Einheitssimplex  $T_{0,s}$  kann man leicht durch Integration berechnen:  $|T_{0,s}| = \frac{1}{s!}$ . Also weiß man:  $|T| = \frac{1}{s!} |\det A|$ . Das benötigen wir hier zwar nicht, ist aber bei der Implementierung von Bedeutung. Das Volumen von  $|T|$  läßt sich wie folgt abschätzen:

$$|T| \geq |B_{\frac{\rho(T)}{2}}(x_0)| = |S^{s-1}| \frac{\rho(T)^s}{2^s} = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2^{s-1} \Gamma(\frac{s}{2})} \rho(T)^s .$$

Die Abschätzung nach oben beweist man analog. □

Wir setzen nun Simplexe zu einer Triangulierung des vorgegebenen beschränkten Gebietes  $G \subset \mathbb{R}^n$  zusammen. Es wird verlangt, daß die Simplexe nur an gemeinsamen Seitensimplexten zusammenhängen. Wir werden sehen, dass dann das Gebiet polygonal berandet sein muss.

**Definition 2.7**  $G \subset \mathbb{R}^n$  sei ein beschränktes Gebiet,

$$\bar{G} = \bigcup_{j=1}^m T_j , \quad \partial G = \bigcup_{j=1}^{m'} T'_j \quad (m, m' \in \mathbb{N})$$

mit  $n$ -dimensionalen Simplexten  $T_j$  und  $(n - k)$ -dimensionalen ( $k \in \{1, \dots, n\}$ ) Simplexten  $T'_j$ , die Seitensimplexe der  $T_j$  sind.

$$\mathcal{T} = \{T_j \mid j = 1, \dots, m\}$$

nennt man eine Triangulierung von  $G$ . Sie heißt zulässige Triangulierung, wenn für je zwei Simplexe  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$  gilt, daß  $T_1 \cap T_2 = S$  mit  $S = \emptyset$  oder einem gemeinsamen  $(n - k)$ -dimensionalen ( $k \in \{1, \dots, n\}$ ) Seitensimplex von  $T_1$  und  $T_2$  ist. Für eine zulässige Triangulierung  $\mathcal{T}$  definieren wir

$$h = \max_{T \in \mathcal{T}} h(T), \quad \rho = \min_{T \in \mathcal{T}} h(T). \tag{2.15}$$

$h$  nennen wir globale Gitterweite oder Feinheit von  $\mathcal{T}$ .

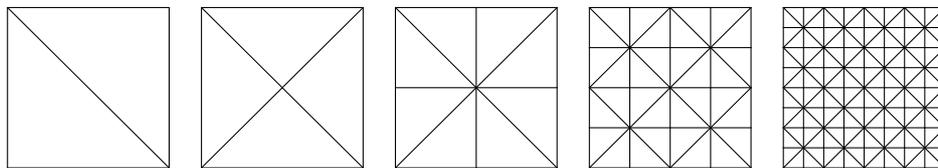


Abbildung 2.1: Eine sukzessive verfeinerte Triangulierung eines Quadrats im  $\mathbb{R}^2$ . Verfeinerungslevels 0, 1, 2, 4 und 6.

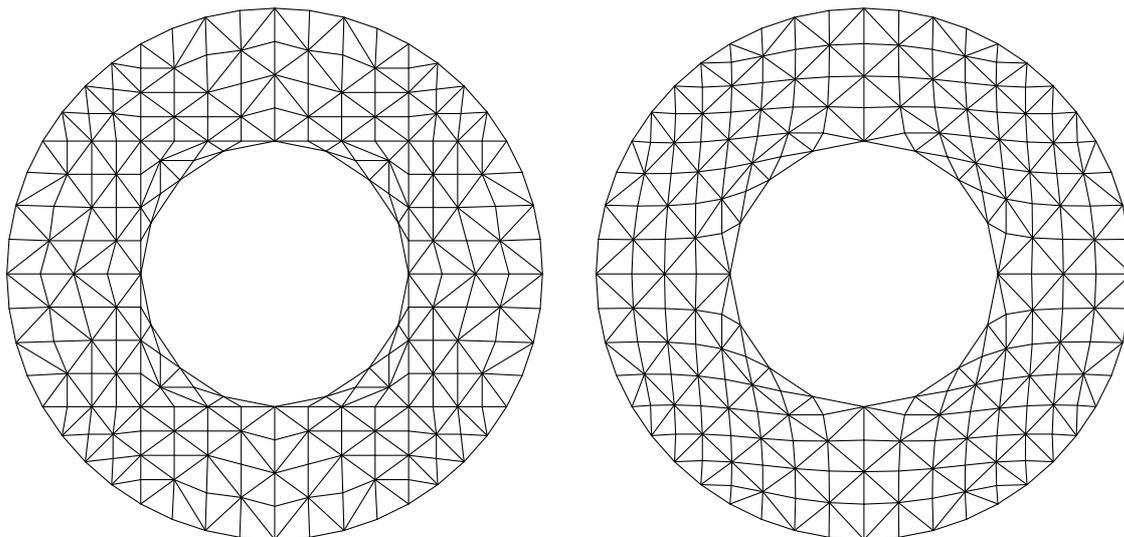


Abbildung 2.2 Zwei Triangulierungen desselben polygonalen Gebietes.

Hilfreich ist der folgende Satz.

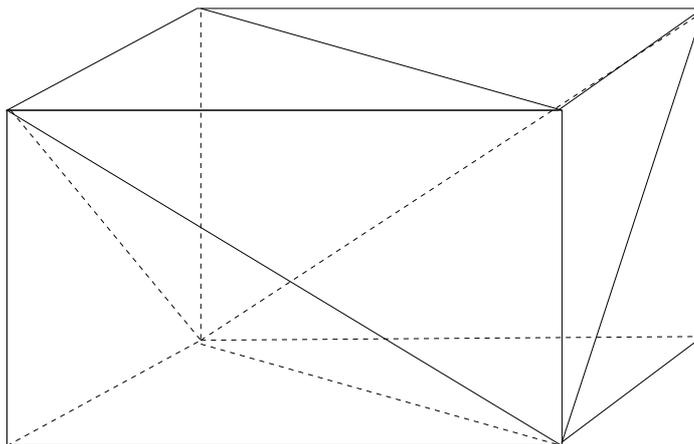


Abbildung 2.3: Eine zulässige grobe Triangulierung eines Quaders im  $\mathbb{R}^3$ , in der eine gestrichelte Verbindungslinie fehlt. **Bitte selbst vervollständigen!**

**Satz 2.8** *Es sei  $G$  zulässig trianguliert und sei  $m \in \mathbb{N}$ . Ist dann  $v \in C^{m-1}(\overline{G})$  und gilt  $v|_T \in C^m(T)$ ,  $T \in \mathcal{T}$ , so ist  $v \in H^m(G)$ .*

*Beweis.* Wir sehen uns nur den Fall  $m = 1$  an. Wesentlich ist hier nur der Nachweis, dass  $v$  eine schwache Ableitung besitzt. Dazu sei  $\varphi \in C_0^\infty(G)$ . Dann erhält man mit dem Gaußschen Integralsatz

$$\int_G v \varphi_{x_i} = \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T v \varphi_{x_i} = \sum_{T \in \mathcal{T}} \left( - \int_T v_{x_i} \varphi + \int_{\partial T} v \varphi \nu_i \right) = - \int_G v_{x_i} \varphi.$$

Hierbei wurde verwendet, dass  $v \in C^0(G)$  ist und dass die Randterme zwischen zwei Simplexen sich wegen der Orientierung der Normalen wegheben.  $\square$

### 2.3 Simpliciale Lagrange-Elemente

Die in (2.13) eingeführten baryzentrischen Koordinaten eignen sich hervorragend zur einfachen Darstellung von Polynomen, die auf Simplexen definiert sind. Wir bezeichnen im folgenden den Raum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich  $k$  ( $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ) mit

$$\mathbb{P}_k = \{p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid p(x) = \sum_{|\alpha|=0}^k c_\alpha x^\alpha, c_\alpha \in \mathbb{R}\} \tag{2.16}$$

und verwenden, wenn es dem Verständnis dient, auch die Bezeichnung  $\mathbb{P}_k(M) = \{p|_M \mid p \in \mathbb{P}_k\}$  für eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Ist  $p \in \mathbb{P}_k$ ,  $p(x) = \sum_{|\alpha|=0}^k c_\alpha x^\alpha$ , so ist mit (2.13)  $x_i = \sum_{j=0}^n a_{ji} \lambda_j$ ,  $x_i = x_i(\lambda)$ ,  $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ , also

$$p(x) = \sum_{|\alpha|=0}^k c_\alpha \prod_{i=1}^n \left( \sum_{j=0}^n a_{ji} \lambda_j \right)^{\alpha_i}.$$

Wegen  $1 = \sum_{j=0}^n \lambda_j$  läßt sich dann  $p$  als ein Polynom vom Grad  $k$  ohne konstanten Term in den  $n+1$  Variablen  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  schreiben:

$$p(x(\lambda)) = \bar{p}(\lambda) = \sum_{|\beta|=1}^k d_\beta \lambda^\beta.$$

#### Element 2.9 (Lineares Element, R. Courant)

1. Sei  $T$  ein  $n$ -dimensionales Simplex. Dann ist durch Vorgabe von  $p(a_j)$  ( $j = 0, \dots, n$ ) ein  $p \in \mathbb{P}_1(T)$  eindeutig bestimmt.

$$\forall p \in \mathbb{P}_1(T) : p(x) = \bar{p}(\lambda) = \sum_{j=0}^n p(a_j) \lambda_j. \tag{2.17}$$

Es ist  $\dim \mathbb{P}_1(T) = n + 1$ .

2. Ist  $G \subset \mathbb{R}^n$  zulässig trianguliert und sind  $\bar{a}_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) die Ecken der Triangulierung  $\mathcal{T}$ , so ist durch Vorgabe von  $u_h(\bar{a}_j)$  ( $j = 1, \dots, m$ ) eindeutig eine Funktion  $u_h \in X_h$ ,

$$X_h = \{u_h \in C^0(\bar{G}) \mid u_h|_T \in \mathbb{P}_1(T), T \in \mathcal{T}\} \subset H^1(G),$$

bestimmt.

3. Eine Basis von  $X_h$  ist durch die Funktionen

$$\phi_j \in X_h, \phi_j(\bar{a}_k) = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, \dots, m)$$

gegeben.

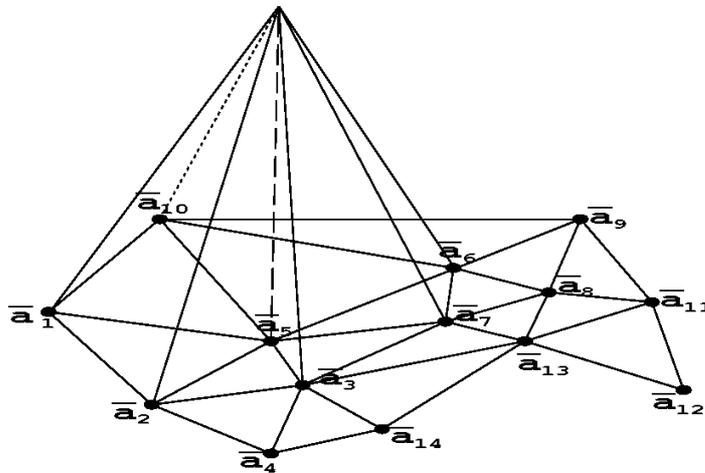


Abbildung 2.4 Eine Basisfunktion des Elements 2.9.

*Beweis.* Zur Bestimmung von  $p \in \mathbb{P}_1(T)$ ,  $p(x) = c_0 + \sum_{j=1}^n c_j x_j$ , ist für gegebene Werte  $p_i$  das Gleichungssystem  $p(a_i) = p_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  zur Bestimmung von  $c_0, \dots, c_n$  zu lösen. Das sind  $n + 1$  Gleichungen für  $n + 1$  Unbekannte. Also reicht es, eine Lösung anzugeben. Zwischenbemerkung: dieses Vorgehen ist prinzipiell von Bedeutung, vor allem zur Konstruktion komplizierter Elemente. Dazu sei  $\{e_0, \dots, e_n\}$  die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^{n+1}$ . (2.17) ist sehr einfach zu zeigen:

$$\bar{p}(\lambda) = \sum_{j=0}^n d_j \lambda_j = p(x(\lambda)) .$$

Wegen  $x(e_k) = a_k$  ( $k = 0, \dots, n$ ) folgt, daß

$$p(a_k) = \bar{p}(e_k) = \sum_{j=0}^n d_j \delta_{jk} = d_k$$

ist. Wenn wir zeigen, daß die damit eindeutig bestimmte stückweise lineare Funktion  $u_h$  auf  $\bar{G}$  stetig ist, folgt mit Satz 2.8, daß  $X_h \subset H^1(G)$  ist. Sind  $T_1$  und  $T_2$  zwei Simplexe der Triangulierung  $\mathcal{T}$  und ist  $T_1 \cap T_2 = S$  mit einem gemeinsamen  $(n - k)$ -dimensionalen Seitensimplex, so ist  $u_h|_S \in \mathbb{P}_1(S)$  nach dem ersten Teil dieses Beweises schon durch die Werte in den Ecken von  $S$  eindeutig bestimmt.  $\square$

Es sei hier vermerkt, daß der Finite-Elemente-Raum  $X_h$  zwar Teilraum von  $H^1(G)$ , nicht aber von  $H^2(G)$  ist.

Wegen der vermutlich höheren Approximationsordnung versuchen wir ein Element mit quadratischen Ansatzfunktionen zu konstruieren. Dazu sei  $T$  wieder ein  $n$ -dimensionales Simplex mit den Ecken  $a_0, \dots, a_n$ . Ein  $p \in \mathbb{P}_2(T)$  schreibt sich in baryzentrischen Koordinaten so:

$$\bar{p}(\lambda) = \sum_{j=0}^n d_j \lambda_j + \sum_{\substack{i,j=0 \\ i < j}}^n d_{ij} \lambda_i \lambda_j.$$

Dabei könnten wir  $d_{ij} = d_{ji}$  und  $d_{ii} = 0$  annehmen, denn  $\lambda_i = 1 - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \lambda_k$  impliziert  $\lambda_i^2 = \lambda_i - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \lambda_i \lambda_k$ . Damit folgt

$$\bar{p}(e_k) = \sum_{j=0}^n d_j \delta_{kj} + \sum_{\substack{i,j=0 \\ i < j}}^n d_{ij} \delta_{ik} \delta_{jk} = d_k,$$

d. h. der lineare Anteil von  $\bar{p}$  ist durch die Werte in den "Ecken"  $e_0, \dots, e_n$  festgelegt. Den quadratischen Anteil kann man durch die Werte von  $p$  in den Kantenmittelpunkten  $a_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j)$  ( $i, j = 0, \dots, n; i < j$ ) beziehungsweise die Werte von  $\bar{p}$  in  $e_{ij} = \frac{1}{2}(e_i + e_j)$  ( $i, j = 0, \dots, n; i < j$ ) festlegen. Es ist dann

$$\begin{aligned} \bar{p}(e_{ij}) &= \frac{1}{2}(\bar{p}(e_i) + \bar{p}(e_j)) + \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^{m-1} d_{lm} \frac{1}{2}(\delta_{li} + \delta_{lj}) \frac{1}{2}(\delta_{mi} + \delta_{mj}) \\ &= \frac{1}{2}(\bar{p}(e_i) + \bar{p}(e_j)) + \frac{1}{4} \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^{m-1} d_{lm} (\delta_{li} \delta_{mi} + \delta_{lj} \delta_{mj} + \delta_{li} \delta_{mj} + \delta_{lj} \delta_{mi}) \\ &= \frac{1}{2}(\bar{p}(e_i) + \bar{p}(e_j)) + \frac{1}{4} d_{ij}, \end{aligned}$$

denn  $\delta_{li} \delta_{mi} = \delta_{lj} \delta_{mj} = 0$  wegen  $l < m$  und  $\delta_{li} \delta_{mj} = 0$  wegen  $l < m$  und  $i < j$ . Insgesamt haben wir damit gezeigt, daß

$$\begin{aligned} d_j &= \bar{p}(e_j) = p(a_j), \\ d_{ij} &= 4\bar{p}(e_{ij}) - 2(\bar{p}(e_i) + \bar{p}(e_j)) = 4(p(a_{ij})) - 2(p(a_i) + p(a_j)) \end{aligned}$$

für  $i, j = 0, \dots, n; i < j$  ist. Also ist

$$\begin{aligned} \bar{p}(\lambda) &= \sum_{j=0}^n p(a_j) \lambda_j + \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^{m-1} (4p(a_{lm}) - 2(p(a_l) + p(a_m))) \lambda_l \lambda_m \\ &= 4 \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^{m-1} p(a_{lm}) \lambda_l \lambda_m + \sum_{j=0}^n p(a_j) \lambda_j - 2 \sum_{m=0}^n p(a_m) \lambda_m \left( \sum_{l=0}^{m-1} \lambda_l \right) - 2 \sum_{l=0}^n \sum_{m=l+1}^n p(a_l) \lambda_l \lambda_m \\ &= 4 \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^{m-1} p(a_{lm}) \lambda_l \lambda_m + \sum_{j=0}^n p(a_j) \lambda_j - 2 \sum_{m=0}^n p(a_m) \lambda_m \left( \sum_{l=0}^{m-1} \lambda_l + \sum_{l=m+1}^n \lambda_l \right) \\ &= 4 \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^{m-1} p(a_{lm}) \lambda_l \lambda_m + \sum_{m=0}^n p(a_m) \lambda_m (2\lambda_m - 1). \end{aligned}$$

**Element 2.10 (Quadratisches Element)**

1. Sei  $T$  ein  $n$ -dimensionales Simplex mit Kantenmittelpunkten  $a_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j)$  ( $i, j = 0, \dots, n; i < j$ ). Dann ist durch Vorgabe von  $p(a_j)$  ( $j = 0, \dots, n$ ) und  $p(a_{ij})$  ( $i, j = 0, \dots, n; i < j$ ) ein  $p \in \mathbb{P}_2(T)$  eindeutig bestimmt.

$$\forall p \in \mathbb{P}_2(T) : p(x) = \bar{p}(\lambda) = \sum_{j=0}^n p(a_j) \lambda_j (2\lambda_j - 1) + 4 \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{j-1} p(a_{ij}) \lambda_i \lambda_j. \quad (2.18)$$

Es ist  $\dim \mathbb{P}_2(T) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ .

2. Ist  $G \subset \mathbb{R}^n$  zulässig trianguliert und sind  $\bar{a}_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) alle Ecken und Kantenmittelpunkte der Triangulierung  $\mathcal{T}$ , so ist durch Vorgabe von  $u_h(\bar{a}_j)$  ( $j = 1, \dots, m$ ) eindeutig eine Funktion  $u_h \in X_h$ ,

$$X_h = \{u_h \in C^0(\bar{G}) \mid u_h|_T \in \mathbb{P}_2(T), T \in \mathcal{T}\} \subset H^1(G)$$

bestimmt.

3. Eine Knotenbasis von  $X_h$  ist durch die Funktionen

$$\phi_j \in X_h, \quad \phi_j(\bar{a}_k) = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, \dots, m)$$

gegeben.

*Beweis.* Teil 1 wurde schon nachgewiesen, die Dimension ist klar. Zu Teil 2 beobachten wir wie beim linearen Element, daß die globale Stetigkeit von  $u_h$  durch die eindeutige Bestimmtheit von  $u_h|_S$ ,  $S = T_1 \cap T_2$  auf dem  $(n - k)$ -dimensionalen gemeinsamen Seitensimplex  $S$  von  $T_1$  und  $T_2$  folgt. Wende Teil 1 auf  $S$  mit  $n - k$  statt  $n$  an. Die Basis erkennt man an der Darstellung (2.18).  $\square$

Mit (2.18) kann man sich auch die Element-Basisfunktionen veranschaulichen. In einer Raumdimension ist auf dem Einheitsselement  $T_0 = (0, 1)$  mit  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_{01} = \frac{1}{2}$

$$\lambda_0 = 1 - x, \quad \lambda_1 = x, \quad \bar{\phi}_0(\lambda) = \lambda_0(2\lambda_0 - 1), \quad \bar{\phi}_1(\lambda) = \lambda_1(2\lambda_1 - 1)$$

also

$$\phi_0(x) = (1 - x)(1 - 2x), \quad \phi_1(x) = x(2x - 1)$$

und in symbolischer Schreibweise

$$\bar{\phi}_{01}(\lambda) = 4\lambda_0\lambda_1, \quad \phi_{01}(x) = 4(x - x^2).$$

Wir können den Polynomgrad weiter erhöhen und so das allgemeine Lagrange-Element konstruieren.

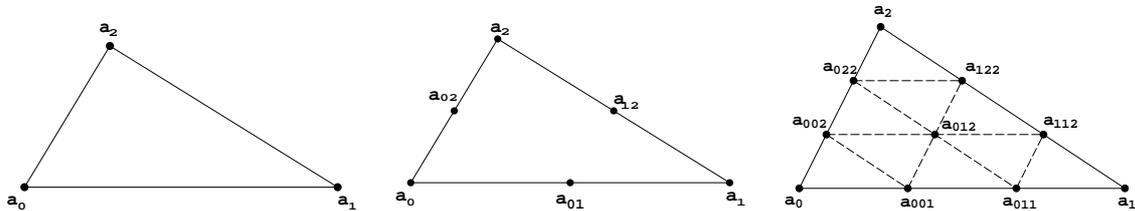


Abbildung 2.5 Lagrange Gitter erster, zweiter und dritter Ordnung eines Dreiecks.

**Hilfssatz 2.11** Es seien  $T$  ein  $n$ -Simplex und  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt für alle  $p \in \mathbb{P}_k(T)$  die Darstellung

$$p(x(\lambda)) = \bar{p}(\lambda) = \sum_{|i|=k} \bar{p}\left(\frac{i}{k}\right) \phi_i(\lambda) \tag{2.19}$$

mit  $i = (i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ ,  $\frac{i}{k} := \left(\frac{i_0}{k}, \dots, \frac{i_n}{k}\right)$  und

$$\phi_i(\lambda) = \prod_{l=0}^n \prod_{j_l=0}^{i_l-1} \frac{\lambda_l - \frac{j_l}{k}}{\frac{i_l}{k} - \frac{j_l}{k}}. \tag{2.20}$$

Das bedeutet, daß  $p \in \mathbb{P}_k(T)$  eindeutig durch seine Werte auf dem Lagrange-Gitter  $k$ -ter Ordnung

$$\mathbb{G}_k(T) = \left\{ x = \sum_{j=0}^n \lambda_j a_j \mid \lambda_j \in \left\{ \frac{m}{k} \mid m = 0, \dots, k \right\}, \lambda_j \geq 0; \sum_{j=0}^n \lambda_j = 1 \right\} \tag{2.21}$$

bestimmt ist. Es ist  $\dim \mathbb{P}_k = \binom{n+k}{k}$ .

*Beweis.* Zunächst ist klar, daß  $\phi_i \in \mathbb{P}_k$  ist, falls  $|i| = k$  ist, denn die Produkte in (2.20) bestehen aus

$$\sum_{l=0}^n i_l = |i| = k$$

Faktoren. Außerdem ist für  $|m| \leq k$

$$\phi_i\left(\frac{m}{k}\right) = \delta_{im} = \delta_{i_0 m_0} \cdots \delta_{i_n m_n},$$

denn für  $m = i$ , d. h.  $m_l = i_l$  ( $l = 0, \dots, n$ ), ist

$$\phi_i\left(\frac{m}{k}\right) = \prod_{l=0}^n \prod_{j_l=0}^{i_l-1} \frac{\frac{m_l}{k} - \frac{j_l}{k}}{\frac{i_l}{k} - \frac{j_l}{k}} = 1.$$

Ist  $m \neq i$ , so gibt es eine Zahl  $l_0 \in \{0, \dots, n\}$ , so daß  $m_{l_0} \neq i_{l_0}$  ist und auch ein  $l^* \in \{0, \dots, n\}$  mit  $m_{l^*} < i_{l^*}$ , denn sonst hätten wir

$$k \geq |m| = \sum_{l^*=0}^n m_{l^*} = \sum_{\substack{l^*=0 \\ l^* \neq l_0}}^n m_{l^*} + m_{l_0} > \sum_{\substack{l^*=0 \\ l^* \neq l_0}}^n i_l + i_{l_0} = |i| = k,$$

was ein Widerspruch ist. Dann ist aber auch

$$\frac{m_{l^*}}{k} - \frac{j_{l^*}}{k} = 0 \quad \text{für ein } j_{l^*} < i_{l^*}$$

und damit  $\phi_i\left(\frac{m}{k}\right) = 0$  für  $m \neq i$ . Mit (2.19) ist ein Polynom  $p \in \mathbb{P}_k(T)$  konstruiert, das vorgegebene Werte auf  $\mathbb{G}_k$  annimmt. Es ist

$$\dim \mathbb{P}_k(T) = |\mathbb{G}_k|,$$

also ist (2.19) die einzige Lösung dieses Problems.  $\square$

**Element 2.12 (Allgemeines Lagrange-Element)** *Es sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  zulässig trianguliert. Ist  $\mathbb{G}_k$  das Gitter  $k$ -ter Ordnung zu dieser Triangulierung  $\mathcal{T}$ , d. h., ist*

$$\mathbb{G}_k = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \mathbb{G}_k(T) = \{\bar{a}_j \mid j = 1, \dots, m\},$$

so ist durch Vorgabe von  $u_h|_{\mathbb{G}_k}$  eindeutig ein  $u_h \in X_h$ ,

$$X_h = \{u_h \in C^0(\bar{G}) \mid u_h|_T \in \mathbb{P}_k(T), T \in \mathcal{T}\} \subset H^1(G)$$

bestimmt. Eine Basis von  $X_h$  ist durch die Funktionen

$$\phi_j \in X_h, \quad \phi_j(\bar{a}_i) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, m)$$

gegeben.

*Beweis.* Es bleibt nur noch der stetige Übergang zwischen den Simplexen nachzuprüfen. Dies geschieht aber genau so wie beim quadratischen Element.  $\square$

Damit haben wir eine Reihe von diskreten Teilräumen  $X_h$  von  $H^1(G)$  konstruiert mit relativ einfachen Basen und mit Basisfunktionen, die kleinen Träger besitzen. Es ist um einiges schwieriger, Teilräume von  $H^2(G)$  zu finden, denn dann müssen die Basisfunktionen global aus  $C^1(\bar{G})$  und nicht nur wie eben konstruiert aus  $C^0(\bar{G})$  sein. Dies geschieht später, wenn wir partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung lösen.

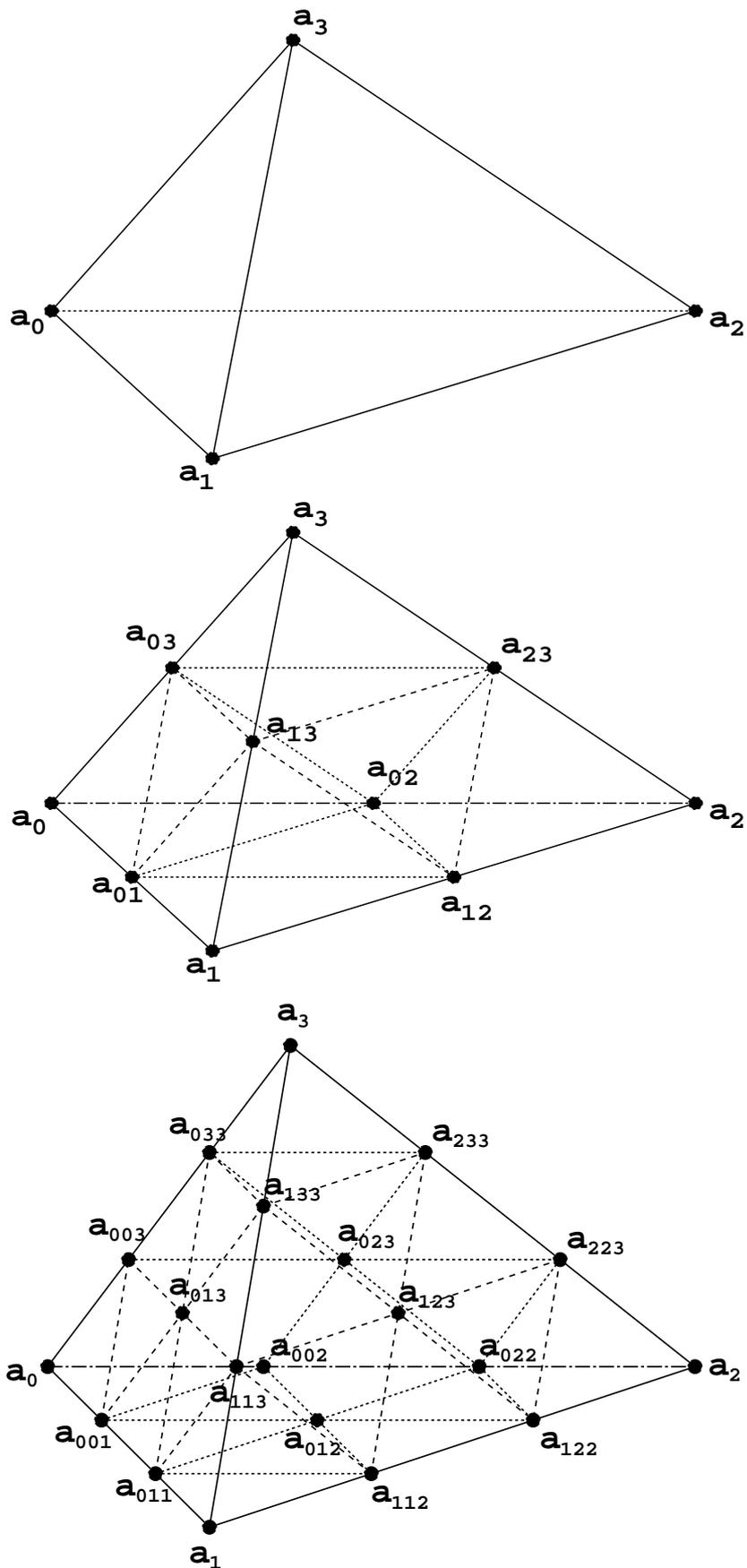


Abbildung 2.6 Lagrange Gitter erster, zweiter und dritter Ordnung für ein 3-Simplex.

## 2.4 Poincaréungleichungen

Im Abschnitt 2.1 haben wir den Fehler zwischen kontinuierlicher und diskreter Lösung abgeschätzt. Satz 2.3 lieferte eine Abschätzung der Form

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(G)} \leq \inf_{\varphi_h \in X_h} \|\nabla(u - \varphi_h)\|_{L^2(G)}.$$

Im vorigen Abschnitt wurden endlichdimensionale Teilräume  $X_h$  des kontinuierlichen Lösungsraumes  $X = \dot{H}^1(G)$  bereitgestellt. Unser Ziel ist eine asymptotische Fehlerabschätzung der Art

$$\|u - u_h\|_{H^1(G)} \leq c h^\alpha$$

mit einer möglichst nur von den Daten abhängenden Konstanten  $c$  und einem möglichst großen Exponenten  $\alpha$ . Im folgenden Kapitel wird bewiesen, daß unter geeigneten Voraussetzungen

$$\|u - I_h u\|_X \leq c h^\alpha$$

für eine "Interpolierende"  $v_h = I_h u \in X_h$  zu  $u \in X$  gilt. Die Konstante  $c$  hängt dann i. a. aber von höheren Normen von  $u$  ab. Die Konstruktion von Interpolationsoperatoren

$$I_h \in L(X, X_h)$$

ist aber unabhängig von Bedeutung für die Numerische Analysis.

Die Abschätzung des Interpolationsfehlers geschieht durch Aufspalten der Normen in die Elementanteile und Transformation auf das Einheitssimplex. Damit dabei nur die optimalen Potenzen der Gitterweite entstehen, dürfen nur die höchsten Ableitungen vorkommen. Dies erreicht man durch sukzessive Anwendung von Poincaréungleichungen.

**Hilfssatz 2.13** Für konvexes  $G \subset \mathbb{R}^n$  mit Durchmesser  $d(G) = \sup_{x,y \in G} |x - y|$  und  $u \in C^1(G)$  gilt

$$|u(x)| \leq \frac{d(G)^n}{n|G|} \int_G \frac{|\nabla u(y)|}{|y - x|^{n-1}} dy,$$

falls die rechte Seite endlich ist und  $\int_G u = 0$  erfüllt ist.

*Beweis.* Für  $x, y \in G$  ist dann mit  $z(t) = x + t(y - x)$ ,  $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} u(x) - u(y) &= u(z(0)) - u(z(1)) = - \int_0^1 \frac{d}{dt} u(z(t)) dt \\ &= - \int_0^1 (\nabla u(z(t)), \dot{z}(t)) dt = - \int_0^1 (\nabla u(x + t(y - x)), y - x) dt. \end{aligned}$$

Mit  $s = |y - x|t$  erhält man weiter

$$= - \int_0^{|y-x|} \left( \nabla u \left( x + s \frac{y-x}{|y-x|} \right), \frac{y-x}{|y-x|} \right) ds,$$

und mit der Abkürzung  $\xi = \frac{y-x}{|y-x|}$ ,

$$= - \int_0^{|y-x|} (\nabla u(x + s\xi), \xi) ds = - \int_0^{|x-y|} \frac{d}{ds} u(x + s\xi) ds.$$

Integriert man nun diese Gleichung bezüglich  $y$ , so folgt mit  $\xi = \xi(y)$

$$|G|u(x) - \int_G u(y) dy = - \int_G \int_0^{|x-y|} \frac{d}{ds} u(x + s\xi) ds dy.$$

Zur Abkürzung schreibt man

$$v(x + s\xi) = \begin{cases} \frac{d}{ds} u(x + s\xi), & \text{falls } x + s\xi \in G \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und erhält

$$u(x) = -\frac{1}{|G|} \int_G \int_0^{|x-y|} v(x+s\xi) ds dy,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \frac{1}{|G|} \int_G \int_0^{|x-y|} |v(x+s\xi)| ds dy \leq \frac{1}{|G|} \int_{\{y \in \mathbb{R}^n \mid |y-x| < d(G)\}} \int_0^{|x-y|} |v(x+s\xi)| ds dy \\ &= \frac{1}{|G|} \int_{B_{d(G)}(x)} \int_0^\infty |v(x+s\xi)| ds dy = \frac{1}{|G|} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |v(x+s\xi)| r^{n-1} d\sigma(\xi) dr ds \\ &\leq \frac{d(G)^n}{n|G|} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} |v(x+s\xi)| d\sigma_\xi ds = \frac{d(G)^n}{n|G|} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \frac{|v(x+s\xi)|}{s^{n-1}} s^{n-1} d\sigma_\xi ds \\ &= \frac{d(G)^n}{n|G|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(z)|}{|z-x|^{n-1}} dz \leq \frac{d(G)^n}{n|G|} \int_G \frac{|\nabla u(z)|}{|z-x|^{n-1}} dz. \end{aligned}$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen. □

**Hilfssatz 2.14** Zu jedem konvexen beschränkten Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  gibt es eine Konstante  $c$ , so daß für alle  $u \in H^{1,p}(G) \cap C^1(G)$  mit  $\int_G u = 0$  und  $1 \leq p \leq \infty$  gilt:

$$\|u\|_{L^p(G)} \leq c \|\nabla u\|_{L^p(G)}.$$

*Beweis.* Aus dem vorangegangenen Hilfssatz folgt

$$\|u\|_{L^p(G)} = \left( \int_G |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{d(G)^n}{n|G|} \left( \int_G \left( \int_G \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^{n-1}} dy \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Das Integral auf der rechten Seite wird für  $p > 1$  so behandelt:

$$\begin{aligned} \int_G \left( \int_G \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^{n-1}} dy \right)^p dx &= \int_G \left( \int_G |\nabla u(y)| |y-x|^{\frac{1}{p}(1-n)} |y-x|^{\frac{1}{p'}(1-n)} dy \right)^p dx \\ &\leq \int_G \int_G |\nabla u(y)|^p |y-x|^{1-n} dy \left( \int_G |y-x|^{1-n} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Es ist nun

$$\int_G |y-x|^{1-n} dy \leq \int_{B_{d(G)}(x)} |y-x|^{1-n} dy = \int_0^{d(G)} \int_{S^{1-n}} r^{1-n+n-1} d\sigma_\xi dr = d(G) |S^{1-n}|$$

also kann man (2.22) weiter abschätzen zu

$$\begin{aligned} &\leq (d(G) |S^{n-1}|)^{p-1} \int_G \int_G |\nabla u(y)|^p |y-x|^{1-n} dy dx \\ &= (d(G) |S^{n-1}|)^{p-1} \int_G |\nabla u(y)|^p \int_G |y-x|^{1-n} dx dy \\ &\leq (d(G) |S^{n-1}|)^p \int_G |\nabla u(y)|^p dy. \end{aligned}$$

Insgesamt hat man damit gezeigt, daß gilt:

$$\|u\|_{L^p(G)} \leq \frac{d(G)^{n+1}}{n|G|} |S^{n-1}| \|\nabla u\|_{L^p(G)}. \tag{2.23}$$

Der Fall  $p = \infty$  folgt dann durch Grenzübergang  $p \rightarrow \infty$  in (2.23). □

Wir benötigen diese Poincarésche Ungleichung für  $H^{1,p}(G)$ -Funktionen. Dazu müssen Sobolevfunktionen durch stetig differenzierbare Funktionen approximiert werden. Dies garantiert der folgende Satz, den wir erst später beweisen werden, denn dazu sind einige Techniken notwendig, die wir erst später kennenlernen.

**Satz 2.15** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $1 \leq p < \infty$ . Dann gibt es zu  $u \in H^{1,p}(G)$  eine Folge von Funktionen  $u_j \in H^{1,p}(G) \cap C^1(G)$  ( $j \in \mathbb{N}$ ), so dass

$$\|u - u_j\|_{H^{1,p}(G)} \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty).$$

Man beachte, dass dies für Funktionen aus  $\dot{H}^{1,p}(G)$  schon durch die Definition gewährleistet war. Das übliche Approximationsargument liefert nun die Poincarésche Ungleichung „mit Mittelwert Null“. Es sei schon hier erwähnt, dass dieser Satz auch für nicht konvexe beschränkte Gebiete richtig bleibt, wenn der Rand nicht zu irregulär ist.

**Satz 2.16 (Poincarésche Ungleichung)** Zu jedem konvexen beschränkten Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  gibt es eine Konstante  $c_{P0} \leq \frac{d(G)^{n+1}\omega_n}{n|G|}$ , so daß für alle  $u \in H^{1,p}(G)$  mit  $\int_G u = 0$  und  $1 \leq p \leq \infty$  gilt:

$$\|u\|_{L^p(G)} \leq c_{P0} \|\nabla u\|_{L^p(G)}.$$

*Beweis.* Den Nachweis führe man selbst. □

Mehrfache Anwendung der eben bewiesenen Poincaréschen Ungleichung für Funktionen mit Mittelwert Null liefert nun das folgende Resultat.

**Satz 2.17** Es seien  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes konvexes Gebiet mit  $\partial G \in C^{0,1}$ ,  $u \in H^{l,p}(G)$  und

$$\int_G D^\alpha u = 0 \quad (|\alpha| = 0, \dots, l-1). \tag{2.24}$$

Dann ist

$$\|u\|_{H^{l,p}(G)} \leq c|u|_{H^{l,p}(G)}$$

mit einer nur von  $G, l$  und  $p$  abhängenden Konstanten  $c$ .

*Beweis.* Da für  $|\alpha| = 0, \dots, l-1$   $D^\alpha u \in H^{l-|\alpha|,p}(G)$  ist, folgt die Behauptung durch sukzessive Anwendung von Satz 2.16. □

Zu einer gegebenen Funktion läßt sich die Voraussetzung (2.24) durch das Abziehen eines geeigneten Polynoms erfüllen.

**Hilfssatz 2.18** Zu  $u \in H^{k+1,p}(G)$  gibt es genau ein Polynom  $q \in \mathbb{P}_k(G)$ , so daß

$$\int_G D^\alpha (u - q) = 0 \quad (|\alpha| = 0, \dots, k). \tag{2.25}$$

*Beweis.*  $q$  hat die Form  $q(x) = \sum_{|\beta|=0}^k c_\beta x^\beta$ , und (2.25) ist äquivalent zu

$$\sum_{|\beta|=0}^k c_\beta \int_G D^\alpha x^\beta dx = \int_G D^\alpha u(x) dx.$$

Das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{|\beta|=0}^k a_{\alpha\beta} c_\beta = b_\alpha \quad (|\alpha| = 0, \dots, k) \tag{2.26}$$

enthält so viele Gleichungen wie Unbekannte  $c_\beta$ . Es reicht also aus, die Eindeutigkeit nachzuweisen. Die Eindeutigkeit sieht man so ein. Es ist

$$\sum_{|\beta|=0}^k a_{\alpha\beta} c_\beta = 0 \quad (|\alpha| = 0, \dots, k)$$

genau dann, wenn

$$\int_G D^\alpha q = 0 \quad (|\alpha| = 0, \dots, k)$$

und dies ist nur für  $q = 0$  wahr. □

Die Quintessenz aus 2.17 und 2.18 ist der folgende Satz:

**Satz 2.19** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes konvexes Gebiet und  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es eine Konstante  $c = c(G, k, p)$ , so daß für alle  $u \in H^{k+1,p}(G)/\mathbb{P}_k(G)$  gilt:

$$\|u\|_{H^{k+1,p}(G)/\mathbb{P}_k(G)} \leq c |u|_{H^{k+1,p}(G)}.$$

Dabei ist wie üblich

$$\|u\|_{H^{k+1,p}(G)/\mathbb{P}_k(G)} = \inf_{q \in \mathbb{P}_k(G)} \|u - q\|_{H^{k+1,p}(G)}.$$

## 2.5 Interpolationsabschätzungen

Wir erinnern an die Bezeichnungen der elementaren Funktionalanalysis. Für normierte Räume  $X$  und  $Y$  bezeichnet

$$L(X, Y) = \{A : X \rightarrow Y \mid A \text{ ist stetig und linear}\}.$$

Die Menge  $L(X, Y)$  ist mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation ein linearer Raum. Darauf ist durch

$$\|A\| = \|A\|_{L(X, Y)} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

eine Norm erklärt. Demnach ist  $L(X, Y)$  mit dieser Norm ein normierter Raum.

**Definition 2.20** Für normierte Räume  $X, Y$  bedeutet

$$X \hookrightarrow Y,$$

daß  $X$  in  $Y$  stetig eingebettet ist, d. h. es gibt einen linearen Operator  $E \in L(X, Y)$ , der injektiv ist.

**Folgerung 2.21** Es sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes konvexes Gebiet und  $k, m \in \mathbb{N}_0$ ;  $p, q \geq 1$  sowie

$$E \in L(H^{k+1,p}(G), H^{m,q}(G)) \tag{2.27}$$

eine Einbettung, die auf  $\mathbb{P}_k(G)$  die Identität ist. Sei

$$I \in L(H^{k+1,p}(G), H^{m,q}(G))$$

ein Interpolations-Operator, der  $\mathbb{P}_k(G)$  invariant läßt:  $Is = s$  ( $s \in \mathbb{P}_k(G)$ ). Dann gibt es ein  $c = c(k, m, p, q, G, \|I\|, \|E\|)$ , s. d. für alle  $u \in H^{k+1,p}(G)$  gilt:

$$\|u - Iu\|_{H^{m,q}(G)} \leq c |u|_{H^{k+1,p}(G)}.$$

*Beweis.* Für  $s \in \mathbb{P}_k(G)$  ist

$$\begin{aligned} \|Eu - Iu\|_{H^{m,q}(G)} &= \|E(u - s) - I(u - s)\|_{H^{m,q}(G)} \\ &\leq (\|E\| + \|I\|) \|u - s\|_{H^{k+1,p}(G)}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Also hat man

$$\|u - Iu\|_{H^{m,q}(G)} \leq (\|E\| + \|I\|) \|u\|_{H^{k+1,p}(G)/\mathbb{P}_k(G)}.$$

Der Rest folgt mit Satz 2.19. □

Jetzt wird im wesentlichen das Skalierungsverhalten einiger oft benötigter Normen untersucht.

**Satz 2.22** Seien  $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und affin äquivalent, d. h. es gibt eine invertierbare affine Abbildung  $x = F(y) = Ay + b$  ( $x, y \in \mathbb{R}^n$ ), so dass  $G_1 = F(G_2)$  ist. Mit  $m \in \mathbb{N}_0$ ,  $p \in [1, \infty]$  gelten dann für  $u \in H^{m,p}(G_1)$  und  $v(y) = u(F(y))$ , ( $y \in G_2$ ) die Abschätzungen

$$|v|_{H^{m,p}(G_2)} \leq c_1 |A|^m |\det A|^{-\frac{1}{p}} |u|_{H^{m,p}(G_1)}, \tag{2.29}$$

$$|u|_{H^{m,p}(G_1)} \leq c_2 |A^{-1}|^m |\det A|^{\frac{1}{p}} |v|_{H^{m,p}(G_2)} \tag{2.30}$$

mit Konstanten  $c_1, c_2$ , die nur von  $m, n$  und  $p$  abhängen.

*Beweis.* Dazu seien ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $u \in C^m(G_1) \cap H^{m,p}(G_1)$ ,  $v \in C^m(G_2) \cap H^{m,p}(G_2)$ . Wegen

$$v_{y_j}(y) = \sum_{i=1}^n u_{x_i}(F(y)) \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(y) = \sum_{i=1}^n u_{x_i}(F(y)) A_{ij}$$

folgt

$$|v_{y_j}(y)| \leq |A^t \nabla u(F(y))| \leq |A| |\nabla u(F(y))| = |A| \left( \sum_{k=1}^n |u_{x_k}(F(y))|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Und weiter

$$\begin{aligned} |v_{y_i y_j}(y)| &\leq |A| \left( \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial y_j} (u_{x_k}(F(y))) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |A| \left( \sum_{k=1}^n |A^t \nabla u_{x_k}(F(y))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq |A|^2 \left( \sum_{k,l=1}^n (u_{x_k x_l}(F(y)))^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Mit vollständiger Induktion beweist man dann, daß für  $|\alpha| = m$  gilt:

$$|D^\alpha v(y)| \leq |A|^{|\alpha|} \left( \sum_{|\beta|=|\alpha|} (D^\beta u(F(y)))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c(m, n) |A|^m \sum_{|\beta|=m} |D^\beta u(F(y))|.$$

Integration und Verwendung der Transformationsformel liefern dann für  $p < \infty$  die Abschätzungen

$$\|D^\alpha v\|_{L^p(G_2)} \leq c(m, n) |A|^m \sum_{|\beta|=m} \|(D^\beta u) \circ F\|_{L^p(G_2)}$$

und

$$\|(D^\beta u) \circ F\|_{L^p(G_2)} = \left( \int_{G_1} |(D^\beta u)(x)|^p |\det A^{-1}| dx \right)^{\frac{1}{p}} = |\det A|^{-\frac{1}{p}} \|D^\beta u\|_{L^p(G_1)}.$$

Also folgt insgesamt

$$\begin{aligned} |v|_{H^{m,p}(G_2)} &= \left( \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L^p(G_2)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c(m, n, p) |A|^m |\det A|^{-\frac{1}{p}} \left( \sum_{|\beta|=m} \|D^\beta u\|_{L^p(G_1)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= c(m, n, p) |A|^m |\det A|^{-\frac{1}{p}} |u|_{H^{m,p}(G_1)}. \end{aligned}$$

Die zweite Abschätzung des Satzes folgt dann aus der ersten, wenn man  $A$  durch  $A^{-1}$  ersetzt. Man beachte, daß i.a.  $|A^{-1}| \neq |A|^{-1}$  ist. □

Die soeben bewiesenen Abschätzungen sind ziemlich grob und außerdem isotrop, d. h. richtungsunabhängig. Es geht nämlich nur  $|A|$ , d. h. der größte Eigenwert von  $(A^t A)^{\frac{1}{2}}$  in die Abschätzung ein.

**Folgerung 2.23** *Es sei  $T$  ein  $n$ -Simplex,  $T_0$  das  $n$ -dimensionale Einheitssimplex und  $F(\bar{x}) = A\bar{x} + b$  die affine Abbildung aus Hilfssatz 2.6. Dann hat man unter den Voraussetzungen von Satz 2.22 für*

$$\bar{u}(\bar{x}) = u(F(\bar{x})) \quad (\bar{x} \in T_0)$$

die Abschätzungen

$$|\bar{u}|_{H^{m,p}(T_0)} \leq c_1(m, n, p) \frac{h(T)^m}{\rho(T_0)^m} \rho(T)^{-\frac{n}{p}} |u|_{H^{m,p}(T)} \tag{2.31}$$

und

$$|u|_{H^{m,p}(T)} \leq c_2(m, n, p) \frac{h(T_0)^m}{\rho(T)^m} h(T)^{\frac{n}{p}} |\bar{u}|_{H^{m,p}(T_0)}. \tag{2.32}$$

*Beweis.* Verwende Satz 2.22 und Hilfssatz 2.6. □

**Satz 2.24** *Es sei  $T$  ein  $n$ -Simplex,  $T_0$  das Einheits-simplex, und  $F : T_0 \rightarrow T$ ,  $F(\bar{x}) = A\bar{x} + b$  die kanonische affine Abbildung. Sind  $k, m \in \mathbb{N}_0$ ,  $p, q \geq 1$  so, daß die Einbettung*

$$H^{k+1,p}(T_0) \hookrightarrow H^{m,q}(T_0)$$

*gilt, und ist*

$$I_0 \in L(H^{k+1,p}(T_0), H^{m,q}(T_0))$$

*ein Interpolationsoperator, der  $\mathbb{P}_k(T_0)$  invariant läßt:*

$$I_0 s_0 = s_0 \quad \forall s_0 \in \mathbb{P}_k(T_0),$$

*so folgt für den durch*

$$(Iu) \circ F = I_0(u \circ F)$$

*definierten Interpolationsoperator  $I \in L(H^{k+1,p}(T), H^{m,q}(T))$  die Fehlerabschätzung*

$$\begin{aligned} |u - Iu|_{H^{m,q}(T)} &\leq c \sigma(T)^m |T|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} h(T)^{k+1-m} |u|_{H^{k+1,p}(T)} \\ &\leq c \sigma(T)^{m-n \min\{0, \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\}} h(T)^{k+1-m+n(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} |u|_{H^{k+1,p}(T)} \end{aligned}$$

*für jedes  $u \in H^{k+1,p}(T)$  mit  $c = c(k, m, p, q, T_0, \|I_0\|)$ .*

*Beweis.* Die Existenz des Interpolationsoperators  $I$  auf  $T$  ist klar wegen der Invertierbarkeit von  $F$ . Sei nun  $u \in H^{k+1,p}(T)$ . Dann ist vermöge der vorausgesetzten Einbettungseigenschaft  $u \in H^{m,q}(T)$  und

$$|u - Iu|_{H^{m,q}(T)} \leq c |A^{-1}|^m |\det A|^{\frac{1}{q}} |(u - Iu) \circ F|_{H^{m,q}(T_0)}$$

nach Satz 2.22, und weiter

$$= c |A^{-1}|^m |\det A|^{\frac{1}{q}} |u \circ F - I_0(u \circ F)|_{H^{m,q}(T_0)}$$

nach Definition von  $I$ , und für jedes  $s_0 \in \mathbb{P}_k(T_0)$

$$\leq c |A^{-1}|^m |\det A|^{\frac{1}{q}} \left( |u \circ F - s_0|_{H^{m,q}(T_0)} + |I_0(s_0 - u \circ F)|_{H^{m,q}(T_0)} \right).$$

Mit der Einbettungskonstante  $\|E_0\|$  weiter

$$\leq c |A^{-1}|^m |\det A|^{\frac{1}{q}} (\|E_0\| + \|I_0\|) |s_0 - u \circ F|_{H^{k+1,p}(T_0)}.$$

Insgesamt ergibt dies mit einer nur von den behaupteten Parametern abhängenden Konstanten  $c$

$$\begin{aligned} |u - Iu|_{H^{m,q}(T)} &\leq c |A^{-1}|^m |\det A|^{\frac{1}{q}} \inf_{s_0 \in \mathbb{P}_k(T_0)} |s_0 - u \circ F|_{H^{k+1,p}(T_0)} \\ &\leq c |A^{-1}|^m |\det A|^{\frac{1}{q}} \|u \circ F\|_{H^{k+1,p}(T_0)/\mathbb{P}_k(T_0)}, \end{aligned}$$

nach Satz 2.19 mit  $G = T_0$

$$\leq c |A^{-1}|^m |\det A|^{\frac{1}{q}} |u \circ F|_{H^{k+1,p}(T_0)}$$

und nach Rücktransformation gemäß Satz 2.22

$$\leq c |A^{-1}|^m |A|^{k+1} |\det A|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} |u|_{H^{k+1,p}(T)}.$$

Hilfssatz 2.6 liefert dann

$$\leq c \rho(T)^{-m} h(T)^{k+1} |T|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} |u|_{H^{k+1,p}(T)}.$$

Mit  $c\rho(T)^n \leq |\det A| \leq ch(T)^n$  und  $\sigma(T) = h(T)/\rho(T)$  erhält man schließlich

$$\leq c \rho(T)^{-m} h(T)^{k+1+n(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} |u|_{H^{k+1,p}(T)}, \quad \text{falls } p \geq q,$$

und

$$\leq c \rho(T)^{n(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}) - m} h(T)^{k+1} |u|_{H^{k+1,p}(T)}, \quad \text{falls } p \leq q$$

ist. Also insgesamt

$$\leq c \sigma(T)^{m-n \min\{0, \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\}} h(T)^{k+1-m+n(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} |u|_{H^{k+1,p}(T)},$$

was zu beweisen war. □

**Beispiel 2.25** Bei der Approximation linearer elliptischer Differentialgleichungen treten typischerweise die Fehlerabschätzungen

$$|u - u_h|_{H^1(G)} \leq c|u - Iu|_{H^1(G)}$$

auf. Außerdem wird später klar werden, daß je nach Regularität der Daten die kontinuierliche Lösung  $u \in H^{k+1}(G)$  für ein  $k \in \mathbb{N}$  ist. Demnach ist für uns in Satz 2.24 der Fall  $k = 1, p = q = 2$  und  $m = 1$  von besonderem Interesse. Die Einbettung  $H^2(T_0) \hookrightarrow H^m(T_0)$  für  $m = 0, 1$  ist trivial. Wir werden außerdem nachweisen, dass nach dem Sobolevschen Einbettungssatz

$$H^2(T_0) \hookrightarrow C^0(T_0) \tag{2.33}$$

gilt, wenn  $2 - \frac{n}{2} > 0$ , d. h. die Raumdimension  $n \leq 3$  ist. Dies gestattet es uns, für  $n \leq 3$  einen in den Voraussetzungen von Satz 2.24 geforderten Interpolationsoperator  $I_0 \in L(H^2(T_0), H^m(T_0))$  in einfacher Weise zu konstruieren. Wir wählen

$$I_0 u_0 \in \mathbb{P}_1(T_0), \quad I_0 u_0(\bar{a}_j) = u_0(\bar{a}_j)$$

für die Ecken  $\bar{a}_j$  des Simplex  $T_0$ .  $u_0$  ist wegen (2.33) punktweise definiert!  $I_0$  ist offensichtlich linear, und mit den Basisfunktionen (baryzentrische Koordinaten zu  $T_0$ )  $\varphi_j(\bar{x}) = \lambda_j(\bar{x})$ , ( $j = 0, \dots, n$ ) läßt sich  $I_0$  so schreiben:

$$(I_0 u_0)(\bar{x}) = \sum_{j=0}^n u_0(\bar{a}_j) \varphi_j(\bar{x})$$

und wie gefordert beschränken ( $m = 0, 1$ ):

$$\|I_0 u_0\|_{H^m(T_0)} \leq \sum_{j=0}^n |u_0(\bar{a}_j)| \|\varphi_j\|_{H^m(T_0)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(T_0)} \sum_{j=0}^n \|\varphi_j\|_{H^m(T_0)} \leq c \|u_0\|_{L^\infty(T_0)} \leq c \|u_0\|_{H^2(T_0)}.$$

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 2.24 erfüllt, und wir können schließen

$$|u - Iu|_{H^m(T)} \leq c \sigma(T)^m h(T)^{2-m} |u|_{H^2(T)}$$

für  $m = 0, 1$ . Insbesondere also

$$\|u - Iu\|_{L^2(T)} \leq c h(T)^2 |u|_{H^2(T)}, \quad \|\nabla(u - Iu)\|_{L^2(T)} \leq c \sigma(T) h(T) |u|_{H^2(T)}.$$

Verlangen wir von einer Triangulierung  $\mathcal{T}$ , daß  $\max_{T \in \mathcal{T}} \sigma(T) \leq c < \infty$  ist, so können wir aus (2.25) schließen, daß

$$\|\nabla(u - Iu)\|_{L^2(G)} \leq c h |u|_{H^2(G)}$$

gilt, wobei  $G = \left(\bigcup_{T \in \mathcal{T}} T\right)^\circ$  sei.

Die elementweise Abschätzung des Interpolationsfehlers verwenden wir nun, um den Interpolationsfehler auf einem polygonalen Gebiet abzuschätzen.

**Satz 2.26** *Es sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und durch  $\mathcal{T}$  zulässig trianguliert. Weiter sei*

$$X_h = \{u_h \in C^0(\bar{G}) \mid u_h|_T \in \mathbb{P}_k(T), T \in \mathcal{T}\}.$$

*Ist nun  $p > \frac{n}{2}$ , so gilt für den gemäß 2.11 Hilfssatz erklärten Lagrange-Interpolationsoperator*

$$Iu \in \mathbb{P}_k(T), \quad Iu = u \text{ auf } \mathbb{G}_k(T), \quad T \in \mathcal{T},$$

*daß  $I$  auf  $\mathbb{P}_k(T)$  invariant ist,  $I \in L(H^{2,p}(G), X_h)$  gilt und für jedes  $m \in \{0, 1\}$  und  $s \in \mathbb{N}_0$  mit  $1 \leq s \leq k$  die Interpolationsabschätzung*

$$|u - Iu|_{H^{m,p}(G)} \leq c_1 \left( \sum_{T \in \mathcal{T}} \sigma(T)^{mp} h(T)^{(s+1-m)p} |u|_{H^{s+1,p}(T)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

für alle  $u \in H^{s+1,p}(G)$  gilt. Ist  $\sigma(T) \leq \sigma$  ( $T \in \mathcal{T}$ ), so folgt

$$|u - Iu|_{H^{m,p}(G)} \leq c_1 \sigma^m h^{s+1-m} |u|_{H^{s+1,p}(G)}.$$

Außerdem gilt für alle  $q > n$  und  $m = 0, 1$

$$|u - Iu|_{H^{m,q}(G)} \leq c_2 \left( \sum_{T \in \mathcal{T}} \sigma(T)^{mq} h(T)^{q(1-m)} |u|_{H^{1,q}(T)}^q \right)^{1/q} \leq c_2 \sigma^m h^{1-m} |u|_{H^{1,q}(G)}.$$

*Beweis.* Die Existenz des Interpolationsoperators  $I$  ist nach 2.11 Hilfssatz und der (noch zu beweisenden) Einbettung  $H^{2,p}(G) \hookrightarrow C^0(\overline{G})$  klar (s. dazu auch Beispiel 2.25). Die Fehlerabschätzungen für  $u \in H^{s+1,p}(G)$  folgen so:

$$|u - Iu|_{H^{m,p}(G)}^p = \sum_{T \in \mathcal{T}} |u - Iu|_{H^{m,p}(T)}^p$$

mit Satz 2.24 weiter (hierzu ist  $H^{s+1,p}(T_0) \hookrightarrow H^{m,p}(T_0)$ , also  $s + 1 \geq m$ , nötig),

$$\leq c \sum_{T \in \mathcal{T}} \sigma(T)^{mp} h(T)^{(s+1-m)p} |u|_{H^{s+1,p}(T)}^p \leq c \sigma^{mp} h^{(s+1-m)p} |u|_{H^{s+1,p}(G)}^p.$$

Der zweite Fall geht wegen  $q > n$  und damit  $H^{1,q}(G) \hookrightarrow C^0(\overline{G})$  analog. □

Die entsprechenden Sobolevschen Einbettungssätze werden im übernächsten Paragraphen nachgetragen.

## 2.6 Fehlerabschätzung für die Poissongleichung

An dieser Stelle ist es uns nun möglich, den Fehler zwischen kontinuierlicher und diskreter Lösung der Poissongleichung abzuschätzen.

**Satz 2.27** *Es sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  mit  $n \leq 3$  ein durch  $\mathcal{T}$  zulässig trianguliertes beschränktes Gebiet. Die Triangulierung genüge der Bedingung  $\sigma(T) \leq \sigma_0$ , ( $T \in \mathcal{T}$ ) mit einer nicht von der Gitterweite abhängigen Konstanten  $\sigma_0$ . Es sei weiter  $u$  die schwache Lösung der Poissongleichung mit Nullrandwerten zur rechten Seite  $f \in L^2(G)$ ,*

$$\int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_G f \varphi \quad \forall \varphi \in \dot{H}^1(G).$$

Sei für  $k \in \mathbb{N}$

$$X_h = \{v_h \in C^0(\overline{G}) \mid v_h|_T \in \mathbb{P}_k(T) (T \in \mathcal{T}), v_h = 0 \text{ auf } \partial G\}$$

der Raum der Finiten Elemente  $k$ -ter Ordnung. Die diskrete Lösung  $u_h \in X_h$  ist definiert durch

$$\int_G \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_h = \int_G f \varphi_h \quad \forall \varphi_h \in X_h.$$

Liegt nun die kontinuierliche Lösung  $u \in H^{s+1}(G)$  für ein  $s \in \{1, \dots, k\}$ , so gilt für den Fehler zwischen kontinuierlicher und diskreter Lösung:

$$\|u - u_h\|_{H^1(G)} \leq ch^s |u|_{H^{s+1}(G)}.$$

Die Konstante  $c$  hängt ab von  $n, s, k, \sigma_0$  und  $G$ . Sie hängt nicht ab von  $u, f$  und  $h$ .

*Beweis.* Wir dürfen im wesentlichen auf das Vorgehen in Beispiel 2.25 verweisen. Dann folgt das Resultat. Eine Übungsaufgabe ist der Nachweis, dass  $X_h$  ein Teilraum von  $\dot{H}^1(G)$  ist. Wir werden diese Problematik aber auch noch im Detail untersuchen. □

Zwar gibt es zu einer rechten Seite  $f \in H^{-1}(G)$  eine schwache Lösung der Poissongleichung, jedoch impliziert die Mindestvoraussetzung  $u \in H^2(G)$ , dass  $f = -\Delta u \in L^2(G)$  ist. Deshalb setzen wir dies gleich so voraus.

Die Verwendung der geringeren Differenzierbarkeitsordnung  $s$  im Satz trägt der Tatsache Rechnung, dass das von uns konstruierte Verfahren mit Finiten Elementen  $k$ -ter Ordnung auch eine Konvergenzordnung liefert, nämlich  $s$ , wenn die Lösung  $u$  nicht zur maximalen Regularitätsklasse  $H^{k+1}(G)$  gehört. In diesem Sinn adaptiert sich das Verfahren an die reale Situation.

## 2.7 Sobolevsche Einbettungssätze

Ein wichtiges Hilfsmittel aus der Analysis ist für uns der Sobolevsche Einbettungssatz, der aussagt, daß  $H^{k,p}(G)$ -Funktionen in  $H^{k-1,p^*}(G)$  für ein  $p^* > p$  liegen. Außerdem kann bewiesen werden, daß für geeignete Zahlen  $k, p$  Funktionen aus  $H^{k,p}(G)$  sogar in klassischen Funktionenräumen  $C^{m,\alpha}(\overline{G})$  liegen.

**Beispiel 2.28** Wir betrachten die Funktion  $u(x) = |x|^s$  im Gebiet  $G = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ . Diese Funktion ist nach Beispiel 1.44 aus  $H^{1,p}(G)$ , falls  $s > 1 - \frac{n}{p}$  gilt. Sei das so. Es ist aber auch  $u \in L^{p^*}(G)$  für  $s > -\frac{n}{p^*}$  - wieder nach Beispiel 1.44. Wir berechnen das maximal mögliche  $p^* > p$ . Dies ist gegeben durch  $1 - \frac{n}{p} \geq -\frac{n}{p^*}$ , und diese Ungleichung ist äquivalent zu der Bedingung  $\frac{1}{p^*} \geq \frac{n-p}{np}$ . Wir versuchen,  $p^*$  möglichst groß zu wählen. Ist  $p > n$ , so können wir  $p^* = \infty$  wählen. Ist dagegen  $p < n$ , so erhalten wir als obere Schranke  $p^* \leq \frac{np}{n-p}$ . Der Fall  $p = n$  ist im allgemeinen ein Sonderfall, für die spezielle Funktion  $u$  wäre dann  $p^* = \infty$  zulässig.

**Hilfssatz** (Hölderungleichung). *Es seien  $p_k \in [1, \infty]$  mit*

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1$$

und  $u_k \in L^{p_k}(G)$ . Dann ist das Produkt  $u_1 \cdot \dots \cdot u_m \in L^1(G)$  und

$$\|u_1 \cdot \dots \cdot u_m\|_{L^1(G)} \leq \|u_1\|_{L^{p_1}(G)} \cdot \dots \cdot \|u_m\|_{L^{p_m}(G)}.$$

Der Beweis ist eine kleine Übungsaufgabe.

**Satz 2.29 (Erster Sobolevscher Einbettungssatz)** *Seien  $G \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt,  $k_1 \geq k_2$ ;  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ ;  $p_1, p_2 \in [1, \infty)$ . Dann gilt:*

$$\mathring{H}^{k_1, p_1}(G) \hookrightarrow \mathring{H}^{k_2, p_2}(G), \quad \text{falls} \quad k_1 - \frac{n}{p_1} \geq k_2 - \frac{n}{p_2}.$$

Insbesondere ist

$$\mathring{H}^{k,p}(G) \hookrightarrow L^{\bar{p}}(G) \quad \text{mit} \quad \bar{p} = \frac{np}{n-kp}, \quad \text{falls} \quad kp < n$$

ist. Ist  $\partial G \in C^{0,1}$ , so gelten die obigen Aussagen auch ohne "o".<sup>1</sup>

*Beweis.* Wir beweisen die Aussage für Funktionen mit Null-Randwerten. Zunächst wird gezeigt, daß für  $p < n$

$$\mathring{H}^{1,p}(G) \hookrightarrow L^{p^*}(G)$$

mit  $p^* = \frac{np}{n-p}$  gilt. Dazu nehmen wir an, daß  $u \in C_0^1(G)$  ist und betrachten zunächst den Fall  $p = 1$ , also  $1^* = \frac{n}{n-1}$ . Dazu sei  $u$  durch 0 auf den  $\mathbb{R}^n$  fortgesetzt. Dann ist für  $i \in \{1, \dots, n\}$

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_n) ds,$$

also auch

$$|u(x)|^n \leq \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{x_i} |u_{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_n)| ds.$$

Für  $n > 1$  folgt demnach

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 &\leq \int_{\mathbb{R}} \left( \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} |u_{x_i}(x)| dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} |u_{x_1}| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |u_{x_2}| dx_2 \cdots \int_{\mathbb{R}} |u_{x_n}| dx_n \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Wir werden erst später sagen, was es bedeutet, dass der Rand eines Gebietes Lipschitzstetig ist. Für den Moment vermerken wir, dass beschränkte konvexe Gebiete diese Eigenschaft besitzen.

Mit der  $m$ -fachen Hölderungleichung für  $m = n - 1$ ,  $p_k = n - 1$  ( $k = 1, \dots, n - 1$ ) schätzen wir weiter ab

$$\leq \left( \int_{\mathbb{R}} |u_{x_1}| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u_{x_2}| dx_2 dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdots \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u_{x_n}| dx_n dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Insgesamt wurde also gezeigt, daß gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \leq \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u_{x_2}| dx_2 dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left( \int_{\mathbb{R}} |u_{x_1}| dx_1 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u_{x_3}| dx_3 dx_1 \cdots \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u_{x_n}| dx_n dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Integriere diese Ungleichung bezüglich  $x_2$ , erhalte

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u|^{\frac{1}{n-1}} dx_2 dx_1 \\ & \leq \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u_{x_2}| dx_2 dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |u_{x_1}| dx_1 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u_{x_3}| dx_3 dx_1 \cdots \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u_{x_n}| dx_n dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_2, \end{aligned}$$

und wende wieder die  $m$ -fache Hölderungleichung an.

$$\leq \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u_{x_1}| dx_2 dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u_{x_3}| dx_3 dx_2 dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \cdots \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u_{x_n}| dx_n dx_2 dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Indem man so weiter fortfährt, erhält man die Ungleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx \leq \left( \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |u_{x_i}| dx \right)^{\frac{1}{n-1}} \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| dx \right)^{\frac{n}{n-1}}$$

oder

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| dx.$$

Das bedeutet aber, daß wir bewiesen haben, daß gilt:

$$\|u\|_{L^1(G)} \leq \|\nabla u\|_{L^1(G)}. \tag{2.34}$$

Der Fall  $p > 1$  wird auf diese Ungleichung zurückgeführt. Man verwende (2.34) für  $|u|^\lambda$  mit einem noch zu wählenden  $\lambda > 1$ . Das ergibt:

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\lambda n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla |u|^\lambda| dx \leq \lambda \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\lambda-1} |\nabla u| dx \leq \lambda \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p'(\lambda-1)} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Unser Ziel ist es,  $\frac{\lambda n}{n-1} = p^* = \frac{np}{n-p}$  zu erhalten. Das bedeutet, daß  $\lambda = \frac{p(n-1)}{n-p}$  zu wählen ist. Wegen  $\frac{1}{p'} = \frac{p-1}{p}$  ist dann

$$(\lambda - 1)p' = \left( \frac{p(n-1)}{n-p} - 1 \right) \frac{p}{p-1} = \frac{np}{n-p} = p^*.$$

Mit dieser Wahl von  $\lambda$  erhalten wir demnach die Ungleichung

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \lambda \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

also wegen

$$\frac{n-1}{n} - \frac{1}{p'} = \frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p} = \frac{n-p}{np} = \frac{1}{p^*}$$

auch

$$\|u\|_{L^{p^*}(G)} \leq \frac{p(n-1)}{n-p} \|\nabla u\|_{L^p(G)}. \quad (2.35)$$

Man beachte, daß der Koeffizient in dieser Ungleichung für  $p \rightarrow n$ ,  $p < n$  degeneriert. Das entspricht unserer Beobachtung, daß  $H^{1,2}(G) \not\hookrightarrow L^\infty(G)$  ( $n = 2$ ) aus Beispiel 1.45.

Die Ungleichung 2.35 wurde nur für Funktionen  $u \in C_0^1(G)$  bewiesen. Seien nun  $u \in \dot{H}^{1,p}(G)$  und  $u_j \in C_0^1(G)$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) mit  $\|u - u_j\|_{H^{1,p}(G)} \rightarrow 0$  ( $j \rightarrow \infty$ ). Wegen

$$\|u_j - u_k\|_{L^{p^*}(G)} \leq c \|\nabla(u_j - u_k)\|_{L^p(G)} \rightarrow 0 \quad (j, k \rightarrow \infty)$$

ist  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $L^{p^*}(G)$ . Es gibt demnach nach Satz 1.39 eine Funktion  $\tilde{u} \in L^{p^*}(G)$ , so daß

$$\|u_j - \tilde{u}\|_{L^{p^*}(G)} \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty).$$

$\tilde{u}$  ist aber fast überall gleich  $u$ , denn da  $G$  beschränkt ist, folgt mit  $p^* > p$

$$\|u - \tilde{u}\|_{L^p(G)} \leq \|u - u_j\|_{L^p(G)} + \|u_j - \tilde{u}\|_{L^{p^*}(G)} |G|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}} \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty),$$

also  $u = \tilde{u}$  f. ü.

Der Fall

$$\dot{H}^{k,p}(G) \hookrightarrow L^{\bar{p}}(G) \quad (kp < n)$$

wird auf den Fall  $k = 1, \bar{p} = p^*$  wie folgt zurückgeführt:  $u \in \dot{H}^{k,p}(G)$  mit  $kp < n$  impliziert  $D^\alpha u \in \dot{H}^{k-j,p}(G) \subset \dot{H}^{1,p_1}(G)$  für  $|\alpha| = j \in \{0, \dots, k-1\}$  und  $p(k-j) < n$ . Also ist nach dem oben Bewiesenen  $D^\alpha u \in L^{p^*}(G)$  für  $p^* = \frac{np}{n-p}$ , d. h.  $u \in \dot{H}^{k-1,p_1}(G)$  für  $p_1 = \frac{np}{n-p}$ . Wie oben folgt für  $k \geq 2$

$$u \in \dot{H}^{k-2,p_1^*}(G) = \dot{H}^{k-2,p_2}(G) \quad \text{mit} \quad p_2 = p_1^* = \frac{np_1}{n-p_1} = \frac{n \frac{np}{n-p}}{n - \frac{np}{n-p}} = \frac{np}{n-2p}.$$

Indem man dies so fortführt, erreicht man  $\dot{H}^{k,p}(G) \hookrightarrow L^{\bar{p}}(G)$  mit  $\bar{p} = \frac{np}{n-kp}$ , falls  $kp < n$  ist. Der Beweis der allgemeinen Aussage bleibt dem Leser überlassen.  $\square$

Aus unseren Beispielen sieht man, daß das Resultat optimal ist. Der zweite Sobolevsche Einbettungssatz behandelt die Einbettung von Sobolevräumen in die  $C^{m,\alpha}$ -Räume. Dabei bezeichnet

$$C^{m,\alpha}(\bar{G}) = \{v \in C^m(\bar{G}) \mid D^\beta v \in C^{0,\alpha}(\bar{G}), |\beta| = m\}.$$

**Satz 2.30 (Zweiter Sobolevscher Einbettungssatz)** *Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes gilt:*

$$\dot{H}^{k,p}(G) \hookrightarrow C^{m,\alpha}(\bar{G})$$

mit  $0 < \alpha < 1$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ , falls

$$k - \frac{n}{p} \geq m + \alpha$$

ist. Für  $\partial G \in C^{0,1}$ , so gilt die Aussage auch ohne "o".

*Beweis.* Wir beweisen die Aussage ohne "o" für konvexes  $G \subset \mathbb{R}^n$ . Dazu sei zunächst  $u \in C^1(G) \cap H^{1,p}(G)$ . Hilfssatz 2.13 liefert mit  $c = \frac{d(G)^n}{n|G|}$

$$|u(x) - \frac{1}{|G|} \int_G u| \leq c \int_G \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy. \quad (2.36)$$

Das zweite Integral schätzt man nun so ab:

$$\begin{aligned} \int_G \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy &= \left( \int_G |\nabla u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_G |x-y|^{-(n-1)p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^p(G)} \left( \int_{B_{d(G)}(x)} |x-y|^{-p'(n-1)} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \|\nabla u\|_{L^p(G)} \left( |S^{n-1}| \int_0^{d(G)} r^{-p'(n-1)+n-1} dr \right)^{\frac{1}{p'}} \end{aligned}$$

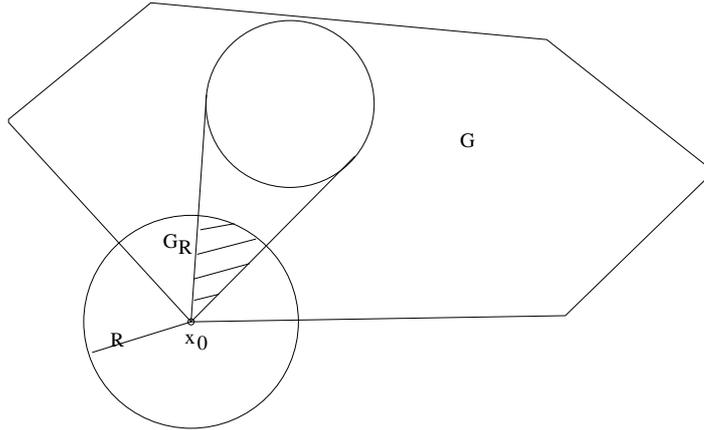


Abbildung 2.7 Geometrische Situation im Beweis von Hilfssatz 2.31.

Der Exponent  $-p'(n-1) + (n-1) = (n-1)(1-p') = -\frac{n-1}{p-1}$  ist größer als  $-1$ , wenn  $n < p$  ist. Da wir den Fall  $k = 1, m = 0, 0 < \alpha < 1$  untersuchen, ist nach Voraussetzung  $\gamma = 1 - \frac{n}{p} \geq \alpha > 0$ , also  $p > n$  und demnach

$$|u(x) - \frac{1}{|G|} \int_G u| \leq c(n, p) \frac{d(G)^{n+\gamma}}{|G|} \|\nabla u\|_{L^p(G)}. \tag{2.37}$$

Daraus erhält man sofort die Abschätzung

$$\sup_G |u| \leq c \|u\|_{H^{1,p}(G)}. \tag{2.38}$$

Man beachte, dass diese Abschätzung nichts über die Stetigkeit von  $u$  am Rand von  $G$  aussagt -  $u$  ist ja auch nicht stetig bis zum Rand, wohl aber die Beschränktheit von  $u$  garantiert. Wir merken uns diese Ungleichung und beweisen einen Hilfssatz, mit dessen Hilfe wir  $u$  bis zum Rand verfolgen können.

**Hilfssatz 2.31** *Unter den Voraussetzungen des Satzes für konvexes  $G$  lässt sich die Oszillation von  $u \in C^1(G) \cap H^{1,p}(G)$  abschätzen:*

$$\text{osc}_{G \cap B_R(x_0)} u = \sup_{x,y \in G \cap B_R(x_0)} |u(x) - u(y)| \leq cR^\gamma \|\nabla u\|_{L^p(G)} \tag{2.39}$$

mit  $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$  und einer nur von  $n, p$  und  $G$  abhängenden Konstanten  $c$ . Dabei ist  $B_R(x_0)$  eine beliebige Kugel mit Mittelpunkt  $x_0 \in \partial G$  im  $\mathbb{R}^n$ .

*Beweis.* Wir verwenden die Abschätzung (2.38) für das konvexe Gebiet  $G_R = G \cap B_R(x_0)$ . Dies liefert dann für  $x, y \in G \cap B_R(x_0)$  die Ungleichung

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - \frac{1}{|G_R|} \int_{G_R} u| + |u(y) - \frac{1}{|G_R|} \int_{G_R} u| \leq c \frac{d(G_R)^{n+\gamma}}{|G_R|} \|\nabla u\|_{L^p(G)}, \tag{2.40}$$

wobei wir die  $L^p(G_R)$ -Norm noch durch die  $L^p(G)$ -Norm abgeschätzt haben. Es ist  $d(G_R) \leq cR$ . Wegen der Konvexität der offenen Menge  $G$  lässt sich nun nachweisen, dass  $|G_R| \geq cR^n$  mit einer positiven Konstanten  $c$  gilt (siehe Abbildung 2.7). Das Volumen des in der Abbildung schraffierten Bereichs, des Schnitts eines Kegels mit der Kugel  $B_R(x_0)$ , ist eine untere Schranke für das Volumen von  $G_R$ . Damit erhält man dann insgesamt

$$|u(x) - u(y)| \leq cR^\gamma \|\nabla u\|_{L^p(G)} \tag{2.41}$$

wie behauptet. □

Wir können nun den Beweis des zweiten Sobolevschen Einbettungssatzes für den Spezialfall beenden. Wie im Beweis des ersten Sobolevschen Einbettungssatzes ist eine Folge  $u_j \in C^1(G) \cap H^{1,p}(G)$  mit  $u_j \rightarrow u$  ( $j \rightarrow \infty$ ) in  $H^{1,p}(G)$  wegen der Abschätzung (2.38) auch Cauchyfolge im Banachraum  $X = \{v \in C^0(G) \mid \sup_G |v| < \infty\}$ , normiert mit der Supremumsnorm. Demnach gibt es eine Funktion  $\tilde{u} \in X$ , so dass  $\sup_G |u_j - \tilde{u}| \rightarrow 0$  für  $j \rightarrow \infty$ . Man zeigt dann leicht (wie früher), dass  $u = \tilde{u}$  fast überall in  $G$  ist.

Es bleibt nachzuweisen, dass  $\tilde{u}$  stetig auf den Rand fortgesetzt werden kann. Dazu wird der vorige Hilfssatz verwendet. Dort haben wir den „Stetigkeitsmodul“ von  $\tilde{u}$  am Rand abgeschätzt. Dazu sei  $x_0$  ein Punkt aus dem Rand von  $G$ . Dann gibt es eine Folge von Punkten  $x_m \in G$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) mit  $x_m \rightarrow x_0$  für  $m \rightarrow \infty$ . Die Werte von  $\tilde{u}$ ,  $(\tilde{u}(x_m))_{m \in \mathbb{N}}$ , bilden eine Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$ , denn nach Hilfssatz 2.31 gilt für genügend große  $m, l \in \mathbb{N}$ :

$$|\tilde{u}(x_m) - \tilde{u}(x_l)| \leq c\delta^\gamma \|\nabla u\|_{L^p(G)}$$

für  $|x_m - x_l| \leq \delta$ . Die Unabhängigkeit des Wertes

$$\tilde{u}(x_0) := \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{u}(x_m)$$

von der Auswahl der Folge zeige man selbst. Außerdem folgt selbstverständlich

$$|\tilde{u}(x_0)| = \left| \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{u}(x_m) \right| \leq c\|u\|_{H^{1,p}(G)}.$$

Insgesamt haben wir also nachgewiesen, dass es eine Funktion  $\tilde{u} \in C^0(\overline{G})$  gibt, die fast überall in  $G$  gleich  $u$  ist und für die die Abschätzung

$$\sup_G |\tilde{u}| \leq c\|u\|_{H^{1,p}(G)}$$

mit einer nicht von  $u$  abhängenden Konstanten  $c$  gilt. Dass heißt, dass wir eine Einbettung von  $H^{1,p}(G)$  in  $C^0(\overline{G})$  bewiesen haben, falls  $p > n$  ist.  $\square$

### 3 Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung

In diesem Kapitel sollen Existenzsatz und Fehlerabschätzung für allgemeine lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung bewiesen werden. Wir werden dabei sehen, dass sich unsere Methoden aus den vorhergehenden Kapiteln sehr schnell und ziemlich einfach auf den Fall allgemeinerer Differentialgleichungen übertragen lassen. Die Differentialgleichungen haben die Form

$$-\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_i})_{x_j} - \sum_{i=1}^n (a_i u)_{x_i} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + c u = f - \sum_{i=1}^n G_{i x_i} \text{ in } G, \quad (3.1)$$

wobei die Koeffizienten  $a_{ij}$ ,  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c$  und die rechte Seite  $f$  und  $G_i$  für  $i, j = 1, \dots, n$  vorgegeben sind. Diese Differentialgleichung hat eine sogenannte Divergenzform. Dies macht sie unseren Methoden zugänglich. Wir geben Randwerte

$$u = g \quad \text{auf } \partial G \quad (3.2)$$

vor. Zu dieser Gleichung definieren wir die Bilinearform

$$B(u, \varphi) = \int_G \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \varphi_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u \varphi_{x_i} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} \varphi + c u \varphi \quad (3.3)$$

und das Funktional

$$F(\varphi) = \int_G f \varphi + \sum_{i=1}^n G_i \varphi_{x_i}. \quad (3.4)$$

Die Bilinearform  $B$  ist im allgemeinen nicht symmetrisch.

**Definition 3.1** Eine Funktion  $u$  heißt schwache Lösung des Dirichletschen Randwertproblems (3.1), (3.2), falls  $u \in H^1(G)$ ,  $u - g \in \dot{H}^1(G)$  und

$$B(u, \varphi) = F(\varphi) \quad \forall \varphi \in \dot{H}^1(G) \quad (3.5)$$

gilt.

#### 3.1 Der funktionalanalytische Rahmen

In diesem Abschnitt werden die funktionalanalytischen Methoden formuliert, die zur Existenz einer schwachen Lösung führen. Diese Methoden helfen danach auch bei der Untersuchung der numerischen Approximation dieser Lösung durch Finite Elemente. Diese Methoden sind analog zu den für die Poissongleichung entwickelten Methoden.

**Satz 3.2 (Darstellungssatz von Riesz)** *Es seien  $X$  ein Hilbertraum mit Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_X$  und  $f \in X'$ . Dann gibt es genau ein  $x_0 \in X$ , so daß für alle  $x \in X$  gilt:*

$$f(x) = (x, x_0)_X. \quad (3.6)$$

*Beweis.* Wir beweisen den Satz für reelle Hilberträume. Man beachte, dass der Beweis das Dirichlettsche Prinzip (Satz 1.53) imitiert. So ist dieser Beweis historisch auch entstanden. Wir definieren das Funktional

$$I(x) = \frac{1}{2} \|x\|_X^2 - f(x).$$

Es liefert eine Abbildung  $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ , und wir merken uns schon hier die einfache Relation

$$\|x\|_X^2 = 2I(x) + 2f(x), \quad (3.7)$$

Wir beweisen, dass es ein Minimum  $x_0 \in X$  des Funktionals  $I$  auf  $X$  gibt. Dazu setzen wir

$$d = \inf_{v \in X} I(v).$$

1. *Schritt:* Klar ist, dass  $d < \infty$  ist, denn  $X \neq \emptyset$ .

2. *Schritt:*  $I$  ist auf  $X$  nach unten beschränkt,  $d > -\infty$ , denn für  $x \in X$  hat man nach der Definition der Norm im Dualraum

$$I(x) \geq \frac{1}{2} \|x\|_X^2 - \|f\|_{X'} \|x\|_X \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \|x\|_X^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_{X'}^2,$$

für jedes positive  $\varepsilon$  nach der Youngschen Ungleichung. Man wähle z. B.  $\varepsilon = 1$ .

3. *Schritt:* Nach der Definition des Infimums gibt es eine Folge  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ,  $x_m \in X$ , eine Minimalfolge, mit der Eigenschaft

$$I(x_m) \rightarrow d \quad (m \rightarrow \infty).$$

4. *Schritt:* Die Minimalfolge ist eine Cauchyfolge. Dies sieht man mit der Parallelogrammgleichung

$$\|a + b\|_X^2 + \|a - b\|_X^2 = 2(\|a\|_X^2 + \|b\|_X^2),$$

ein, die man durch Nachrechnen beweist. Das ergibt dann

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\|_X^2 &= 2(\|x_m\|_X^2 + \|x_n\|_X^2) - \|x_m + x_n\|_X^2 \\ &= 4I(x_m) + 4I(x_n) - 8I\left(\frac{x_m + x_n}{2}\right) \\ &\leq 4I(x_m) + 4I(x_n) - 8d \\ &\rightarrow 4d + 4d - 8d = 0 \end{aligned}$$

für  $m, n \rightarrow \infty$ .

5. *Schritt:* Da  $X$  vollständig ist, konvergiert die Cauchyfolge, d. h. es gibt ein  $x_0 \in X$ , so dass  $\|x_m - x_0\|_X \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$ .

6. *Schritt:* Da die Norm in einem normierten Raum stetig ist und  $f$  als Element des Dualraums nach Definition stetig ist, ist auch das Funktional  $I$  stetig, und wir erhalten

$$d = \lim_{m \rightarrow \infty} I(x_m) = I\left(\lim_{m \rightarrow \infty} x_m\right) = I(x_0).$$

Also ist auch

$$I(x_0) = \inf_{x \in X} I(x).$$

7. *Schritt:* Wie im Beweis von Satz 1.32 erhält man dann für das Minimum  $x_0$  die gewünschte Gleichung (3.6), denn für  $x \in X$  und  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  ist auch  $x_0 + \varepsilon x \in X$ , und die Funktion  $\phi(\varepsilon) = I(x_0 + \varepsilon x)$  hat in  $\varepsilon = 0$  ihr Minimum. Aus

$$\phi(\varepsilon) = \frac{1}{2} \|x_0\|_X^2 + \varepsilon(x, x_0)_X + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \|x\|_X^2 - f(x_0) - \varepsilon f(x)$$

folgt dann wegen  $\phi'(0) = 0$  die Behauptung.

Die Eindeutigkeit von  $x_0$  ist klar. □

Dieser Rieszsche Darstellungssatz lässt sich nun zum allgemeinen Satz von Lax-Milgram erweitern, den wir dann verwenden werden, um die Existenz einer schwachen Lösung unserer Differentialgleichung zu beweisen.

**Satz 3.3 (Lax Milgram)** *Es sei  $X$  ein reeller Hilbertraum. Weiter sei  $B : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Bilinearform, die beschränkt (stetig),*

$$\exists c_1 \geq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in X : \quad |B(x_1, x_2)| \leq c_1 \|x_1\|_X \|x_2\|_X, \quad (3.8)$$

und koerziv,

$$\exists c_0 > 0 \forall x \in X : B(x, x) \geq c_0 \|x\|_X^2, \quad (3.9)$$

ist. Sei weiter  $f \in X'$ . Dann gibt es genau ein  $u \in X$ , so daß für alle  $\varphi \in X$

$$B(u, \varphi) = f(\varphi) \quad (3.10)$$

gilt. Außerdem gibt es (genau) ein  $T \in L(X, X)$  mit  $T^{-1} \in L(X, X)$  und

$$\|T\|_{L(X, X)} \leq \frac{1}{c_0}, \quad \|T^{-1}\|_{L(X, X)} \leq c_1,$$

so dass für alle  $x_1, x_2 \in X$  gilt:

$$(x_1, x_2)_X = B(x_1, Tx_2). \quad (3.11)$$

Dieser Satz gilt auch für komplexe Hilberträume, wenn  $B$  eine Sesquilinearform ist, d. h. linear im ersten Argument und antilinear im zweiten Argument ist.

*Beweis.* Für festes  $x_0 \in X$  definiere

$$F(x) = B(x_0, x) \quad (x \in X).$$

Offensichtlich ist  $F$  linear und stetig mit  $\|F\|_{X'} \leq c_1 \|x_0\|_X$ . Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz Satz 3.2 gibt es dann ein Element (wir nennen es so:)  $Tx_0 \in X$ , so dass

$$B(x_0, x) = F(x) = (x, Tx_0)_X, \quad \forall x \in X$$

gilt. Damit ist die Abbildung  $T : X \rightarrow X$  definiert.  $T$  ist linear, denn für jedes  $x \in X$  und alle  $x_1, x_2 \in X$  und alle  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  hat man

$$\begin{aligned} (T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2), x)_X &= B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, x) = \lambda_1 B(x_1, x) + \lambda_2 B(x_2, x) \\ &= \lambda_1 (Tx_1, x)_X + \lambda_2 (Tx_2, x)_X = (\lambda_1 Tx_1 + \lambda_2 Tx_2, x)_X. \end{aligned}$$

Da diese Gleichung für alle  $x \in X$  gilt, erhalten wir

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 Tx_1 + \lambda_2 Tx_2.$$

$T$  ist auch stetig, denn mit (3.8) folgt

$$\|Tx\|_X^2 = (Tx, Tx)_X = B(x, Tx) \leq c_1 \|x\|_X \|Tx\|_X$$

und demnach

$$\|Tx\|_X \leq c_1 \|x\|_X.$$

$T$  ist injektiv wegen der Koerzivität (3.9) von  $B$ . Mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung folgt

$$c_0 \|x\|^2 \leq B(x, x) = (x, Tx)_X \leq \|x\|_X \|Tx\|_X,$$

also

$$c_0 \|x\|_X \leq \|Tx\|_X.$$

Also folgt aus  $Tx = 0$ , dass  $x = 0$  ist, und da  $T$  linear ist, impliziert dies die Injektivität der Abbildung  $T$ . Der Bildbereich  $R(T) = TX = \{y \in X \mid \exists x \in X : Tx = y\}$  ist abgeschlossen. Dazu sei  $y_m \in R(T)$  eine konvergente Folge:  $y_m \rightarrow y$  ( $m \rightarrow \infty$ ). Es ist zu zeigen, dass es ein  $x \in X$  gibt, so dass  $y = Tx$  ist. Jedes  $y_m$  lässt sich als Bild darstellen,  $y_m = Tx_m$ , mit geeignetem  $x_m \in X$ . Diese Folge  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  ist aber eine Cauchyfolge, denn

$$c_0 \|x_m - x_l\|_X \leq \|T(x_m - x_l)\|_X = \|Tx_m - Tx_l\|_X = \|y_m - y_l\|_X \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty).$$

Demnach gibt es ein  $x$  im Hilbertraum  $X$ , gegen das diese Folge konvergiert:  $x_m \rightarrow x$  ( $m \rightarrow \infty$ ). Wegen der Stetigkeit von  $T$  erhält man dann schließlich  $Tx = y$ .

Nun ist aber  $T$  auch surjektiv, d. h.  $R(T) = X$ . Denn wäre  $R(T) \subset X$  ein echter Teilraum, also  $R(T) \neq X$ , so gäbe es ein Element  $x_0 \in X \setminus \{0\}$ , so dass  $(x_0, y)_X = 0$  für alle  $y \in R(T)$ . Dies ergibt

sich durch eine einfache Anwendung des Riesz'schen Darstellungssatzes. Dann erhält man aber einen Widerspruch zu  $x_0 \neq 0$ :

$$c_0 \|x_0\|_X^2 \leq B(x_0, x_0) = (Tx_0, x_0) = 0,$$

und das bedeutet, dass  $x_0 = 0$  wäre.

Schließlich ist noch zu beweisen, dass es zu gegebenem Funktional  $f \in X'$  genau ein  $u \in X$  gibt, so dass für alle  $\varphi \in X$  die Gleichung (3.10) gilt. Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz hat man genau ein  $x_0 \in X$ , so dass für alle  $\varphi \in X$  gilt  $f(\varphi) = (\varphi, x_0)_X$ . Nach obigen Beweisschritten gibt es ein  $u \in X$  mit  $Tu = x_0$ . Demnach hat man für alle  $\varphi \in X$ :

$$B(u, \varphi) = (Tu, \varphi)_X = (x_0, \varphi)_X = f(\varphi).$$

Die Eindeutigkeit von  $u$  ergibt eine erneute Anwendung der Koerzivität der Bilinearform. □

### 3.2 Schwache Lösungen

In der Einleitung zu diesem Kapitel haben wir der Differentialgleichung (3.1) die Bilinearform (3.3) zugeordnet. Außerdem haben wir eine rechte Seite (3.4) definiert. Nach den Resultaten des vorherigen Abschnitts müssen wir nun die Stetigkeit und die Koerzivität der Bilinearform - unter geeigneten Annahmen an die Daten - nachweisen. Danach können wir den Satz von Lax-Milgram anwenden und erhalten die Existenz einer schwachen Lösung gemäß Definition 3.1.

Untersuchen wir zunächst die Stetigkeit von  $B$  auf  $H^1(G)$ . Dabei verwenden wir Eigenschaften der Koeffizienten der Differentialgleichung in dem Umfang, in dem sie uns im Moment nötig erscheinen. Diese werden dann im Existenzsatz vorausgesetzt. Einige dieser Bedingungen lassen sich noch abschwächen. Es ist für  $v, w \in H^1(G)$

$$\begin{aligned} |B(v, w)| &\leq \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty(G)} \int_G |v_{x_i}| |w_{x_j}| + \sum_{i=1}^n \|a_i\|_{L^\infty(G)} \int_G |v| |w_{x_i}| \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(G)} \int_G |v_{x_i}| |w| + \|c\|_{L^\infty(G)} \int_G |v| |w| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty(G)} \|v_{x_i}\|_{L^2(G)} \|w_{x_j}\|_{L^2(G)} + \sum_{i=1}^n \|a_i\|_{L^\infty(G)} \|v\|_{L^2(G)} \|w_{x_i}\|_{L^2(G)} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(G)} \|v_{x_i}\|_{L^2(G)} \|w\|_{L^2(G)} + \|c\|_{L^\infty(G)} \|v\|_{L^2(G)} \|w\|_{L^2(G)} \\ &\leq C_1 \|v\|_{H^1(G)} \|w\|_{H^1(G)}, \end{aligned}$$

mit der Konstanten

$$C_1 = \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty(G)} + \sum_{i=1}^n \|a_i\|_{L^\infty(G)} + \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(G)} + \|c\|_{L^\infty(G)} \tag{3.12}$$

Die Koerzivität der Bilinearform ist ohne zusätzliche Voraussetzung an die Koeffizienten nicht gegeben, wie man am folgenden Beispiel sieht.

**Beispiel 3.4** Für den Spezialfall  $G = (0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ ,  $a_{ij} = \delta_{ij}$ ,  $a_i = b_i = 0$ ,  $c = -2\pi^2$ ,  $f = g = 0$  gilt für die zugehörige Bilinearform

$$B(v, w) = \int_G \nabla v \nabla w - 2\pi^2 \int_G vw,$$

daß

$$B(v, v) = \int_G |\nabla v|^2 - 2\pi^2 \int_G v^2 = 0$$

für  $v(x_1, x_2) = 0$  oder  $v(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$  ist. Also kann  $B$  nicht koerziv sein.

Eine einfache Bedingung, die die Koerzivität sichert, ist die folgende sogenannte *L-Bedingung*.

Es gibt eine Zahl  $c_0 > 0$ , so daß für alle  $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j + \sum_{i=1}^n a_i\xi_0\xi_i + \sum_{i=1}^n b_i\xi_i\xi_0 + c\xi_0^2 \geq c_0 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad (3.13)$$

fast überall in  $G$  gilt.

Für  $\xi_0 = 0$  ist das die sogenannte Elliptizitätsbedingung

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (3.14)$$

und für  $\xi_1 = \dots = \xi_n = 0, \xi_0 = 1$  impliziert (3.13), daß  $c \geq 0$  fast überall in  $G$  ist.

Damit können wir den Existenz- und Eindeutigkeitsatz für schwache Lösungen von (3.1) beweisen.

**Satz 3.5** *Genügen die Koeffizienten  $a_{ij}, a_i, b_i, c \in L^\infty(G)$  auf dem beschränkten Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  der Bedingung (3.13) und sind  $g \in H^1(G), f \in L^2(G), G_i \in L^2(G)$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ), so gibt es genau eine schwache Lösung  $u \in H^1(G)$  der Differentialgleichung (3.1), d. h. es ist  $u - g \in \dot{H}^1(G)$  und*

$$\int_G \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}\varphi_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u \varphi_{x_i} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} \varphi + cu\varphi \right) = \int_G \left( f\varphi + \sum_{i=1}^n G_i \varphi_{x_i} \right)$$

für alle  $\varphi \in \dot{H}^1(G)$ .

Außerdem hat man die A-Priori-Abschätzung

$$\|u\|_{H^1(G)} \leq c_2 \left( \|f\|_{L^2(G)} + \sum_{i=1}^n \|G_i\|_{L^2(G)} + \|g\|_{H^1(G)} \right).$$

mit einer nur von  $C_1$  aus (3.12),  $c_0$  und der Poincaré-Konstanten des Gebiets  $G$  abhängenden Konstanten  $c_2$ .

*Beweis.* Mit der Bilinearform  $B$  aus (3.3) und dem Funktional  $F$  aus (3.4) transformieren wir das Problem durch  $v := u - g$  auf Nullrandwerte. Dann ist ein  $v \in X = \dot{H}^1(G)$  gesucht, so daß für alle  $\varphi \in X$

$$B(v, \varphi) = F(\varphi) - B(g, \varphi) = \tilde{F}(\varphi)$$

ist.  $X$  ist ein Hilbertraum. Wir werden gleich zeigen, dass  $\tilde{F} \in H^{-1}(G) = X'$  und  $B$  eine stetige, koerzive Bilinearform auf  $X$  ist. Der Satz 3.3 von Lax–Milgram liefert dann genau ein  $v$  und damit genau ein  $u$  wie verlangt. Die Koerzivität von  $B$  zeigt man wie folgt. Für jedes  $v \in \dot{H}^1(G)$  ist

$$B(v, v) = \int_G \sum_{i,j=1}^n a_{ij}v_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i v v_{x_i} + \sum_{i=1}^n b_i v_{x_i} v + cv^2 \geq c_0 \int_G \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2$$

für  $\xi_0 = v(x), \xi_i = v_{x_i}(x)$  in (3.13). Wegen der Poincaréungleichung folgt

$$B(v, v) \geq C_0 \|v\|_{H^1(G)}^2$$

mit einer geeigneten Zahl  $C_0 > 0$ . Also ist  $B$  auf  $X$  koerziv. Leicht zeigt man mit der Stetigkeitskonstante  $C_1$  von  $B$ , dass  $\tilde{F} \in X'$  ist:

$$\begin{aligned} |\tilde{F}(\varphi)| &\leq |F(\varphi)| + |B(g, \varphi)| \\ &\leq \|f\|_{L^2(G)}\|\varphi\|_{L^2(G)} + \sum_{i=1}^n \|G_i\|_{L^2(G)}\|\varphi\|_{L^2(G)} + C_1\|g\|_{H^1(G)}\|\varphi\|_{H^1(G)} \\ &\leq \left( \|f\|_{L^2(G)} + \sum_{i=1}^n \|G_i\|_{L^2(G)} + C_1\|g\|_{H^1(G)} \right) \|\varphi\|_{H^1(G)} \end{aligned}$$

Die A-Priori-Abschätzung folgt hieraus und aus der schwachen Differentialgleichung:

$$C_0 \|v\|_{H^1(G)}^2 \leq B(v, v) = \tilde{F}(v) \leq \left( \|f\|_{L^2(G)} + \sum_{i=1}^n \|G_i\|_{L^2(G)} + c_1 \|g\|_{H^1(G)} \right) \|v\|_{H^1(G)}.$$

Dies liefert eine Abschätzung für die  $H^1(G)$ -Norm von  $v$  und somit auch eine für die  $H^1(G)$ -Norm von  $u$  wegen der Ungleichung

$$\|u\|_{H^1(G)} \leq \|v\|_{H^1(G)} + \|g\|_{H^1(G)}.$$

Optimale Konstanten kann man leicht selbst herleiten.  $\square$

### 3.3 Diskrete Lösungen und Fehlerabschätzung

Für diesen Abschnitt nehmen wir an, dass die Voraussetzungen des Existenzsatzes Satz 3.5 erfüllt sind. Zunächst beweisen wir eine einfache abstrakte Fehlerabschätzung für Bilinearformen.

**Satz 3.6** *Es seien  $X$  ein normierter Raum und  $X_h \subset X$  ein Teilraum. Weiter sei  $F \in X'$  ein lineares Funktional auf  $X$ . Durch  $B : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine stetige und koerzive Bilinearform gegeben,*

$$|B(v, w)| \leq c_1 \|v\|_X \|w\|_X, \quad B(v, v) \geq c_0 \|v\|_X^2 \quad (v, w \in X),$$

Sind dann  $u \in X$  und  $u_h \in X_h$  Lösungen von

$$B(u, \varphi) = F(\varphi) \quad \forall \varphi \in X, \quad B(u_h, \varphi_h) = F(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in X_h,$$

so folgt die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_X \leq \frac{c_1}{c_0} \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X. \quad (3.15)$$

Außerdem gilt:

$$B(u - u_h, \varphi_h) = 0 \quad \forall \varphi_h \in X_h. \quad (3.16)$$

Die Relation (3.16) nennt man „Orthogonalität“ des Fehlers  $u - u_h$ . Für eine symmetrische Bilinearform  $B$  ist nach unseren Voraussetzungen durch  $B(\cdot, \cdot)$  ein Skalarprodukt auf  $X$  gegeben. Daher kommt diese Bezeichnung.

*Beweis.* Wegen  $X_h \subset X$  folgt für alle diskreten Testfunktionen  $\varphi_h \in X_h$

$$B(u - u_h, \varphi_h) = B(u, \varphi_h) - B(u_h, \varphi_h) = F(\varphi_h) - F(\varphi_h) = 0,$$

also (3.16). Mit dieser „Orthogonalität des Fehlers“ folgt nun für jedes  $v_h \in X_h$

$$\begin{aligned} c_0 \|u - u_h\|_X^2 &\leq B(u - u_h, u - u_h) = B(u - u_h, u) - B(u - u_h, u_h) \\ &= B(u - u_h, u) \\ &= B(u - u_h, u) - B(u - u_h, v_h) = B(u - u_h, u - v_h) \\ &\leq c_1 \|u - u_h\|_X \|u - v_h\|_X, \end{aligned}$$

also auch

$$\|u - u_h\|_X \leq \frac{c_1}{c_0} \|u - v_h\|_X \quad \forall v_h \in X_h,$$

was (3.15) ergibt.  $\square$

Diskretisiert man die Randwerte  $g$  noch nicht, so lässt sich leicht folgendes Resultat nachweisen.  $G$  sei dabei ein beschränktes Gebiet. Man beachte, dass die Lösung  $u_h$  keine diskrete Funktion aus  $X_h$ , sondern Summe einer diskreten Funktion und einer gegebenen Funktion ist.

**Satz 3.7** *Es seien  $B$  und  $F$  wie in Satz 3.6, speziell  $X = \dot{H}^1(G)$  und  $g \in H^1(G)$ . Weiter sei  $X_h \subset \dot{H}^1(G)$  ein abgeschlossener<sup>1</sup> Teilraum. Dann gibt es genau eine Lösung  $u_h \in g + X_h = \{g + v_h \mid v_h \in X_h\}$  von*

$$B(u_h, \varphi_h) = F(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in X_h.$$

<sup>1</sup>z. B. endlichdimensionaler

*Beweis.* Wir transformieren auf Nullrandwerte durch

$$\tilde{F}(\varphi) = F(\varphi) - B(g, \varphi) \quad (\varphi \in \dot{H}^1(G)).$$

Wegen der Abgeschlossenheit ist  $X_h$  ein Hilbertraum. Wir lösen mit dem Satz von Lax-Milgram das Problem ein  $v_h \in X_h$  zu finden, so dass

$$B(v_h, \varphi_h) = \tilde{F}(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in X_h$$

gilt. Die Voraussetzungen sind erfüllt. Danach setzen wir  $u_h = v_h + g$  und sind fertig. □

Nun sind wir in der Lage die Existenz einer diskreten Lösung des Randwertproblems (3.1), (3.2) zu beweisen zusammen mit einer Abschätzung des Fehlers zwischen kontinuierlicher und diskreter Lösung.

**Satz 3.8** *Es seien die Voraussetzungen des Existenzsatzes Satz 3.5 erfüllt, und  $u$  sei die dort konstruierte schwache Lösung. Das Gebiet  $G$  sei zulässig mit  $\max_{T \in \mathcal{T}_h} \sigma(T) \leq \sigma$  trianguliert. Dabei sei  $\sigma$  unabhängig von  $h$ . Als diskreten Raum wählen wir*

$$X_h = \{v_h \in C^0(\bar{G}) \mid v_h|_T \in \mathbb{P}_k(T), T \in \mathcal{T}_h\} \tag{3.17}$$

für eine natürliche Zahl  $k$  und  $\dot{X}_h = X_h \cap \dot{H}^1(G)$ . Sei weiter  $g_h \in X_h$ . Dann gibt es genau eine diskrete Lösung  $u_h \in X_h$  von (3.1), (3.2), d. h.  $u_h - g_h \in \dot{X}_h$  und

$$\int_G \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{hx_i} \varphi_{hx_j} + \sum_{i=1}^n a_i u_h \varphi_{hx_i} + \sum_{i=1}^n b_i u_{hx_i} \varphi_h + c u_h \varphi_h \right) = \int_G \left( f \varphi_h + \sum_{i=1}^n G_i \varphi_{hx_i} \right) \forall \varphi_h \in \dot{X}_h.$$

Liegt dann die schwache Lösung  $u$  in  $H^{s+1}(G)$  und ist  $g \in H^{s+1}(G)$  für ein  $s \in \{1, \dots, k\}$  mit  $s > \frac{n}{2} - 1$ , so folgt die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_{H^1(G)} \leq ch^s (\|u\|_{H^{s+1}(G)} + \|g\|_{H^{s+1}(G)}) + c\|g - g_h\|_{H^1(G)}. \tag{3.18}$$

Wählt man für  $g_h$  die Interpolierende  $g_h = Ig$  von  $g$ , so fehlt der letzte Term auf der rechten Seite in dieser Abschätzung. Die Konstanten in (3.18) sind abhängig von  $\sigma$ ,  $C_0$ ,  $C_1$  und von der Konstanten  $C_I$  in der Interpolationsabschätzung aus Satz 2.26, jedoch nicht von der Gitterweite  $h$ .

*Beweis.* Dass es genau ein  $u_h$  wie behauptet gibt, erschließt sich durch eine Anwendung von Satz 3.7. Dort wählt man für  $g$  die Funktion  $g_h$  und  $X$  ist  $\dot{H}^1(G)$ . Und man verwendet die Eigenschaft  $X_h \subset H^1(G)$ . Damit bleibt der Nachweis der Fehlerabschätzung (3.18). Für den Spezialfall  $g = g_h = 0$  folgt sie sofort aus Satz 3.6 und der Interpolationsabschätzung. Für beliebige Randwerte ist ein Zusatzterm zu untersuchen. Dies tun wir nun.

Wir transformieren auf Nullrandwerte,  $\tilde{u} = u - g$ ,  $\tilde{u}_h = u_h - g_h$ . Dann ist

$$B(\tilde{u}, \varphi) = F(\varphi) - B(g, \varphi), \quad B(\tilde{u}_h, \varphi_h) = F(\varphi_h) - B(g_h, \varphi_h)$$

für alle Testfunktionen  $\varphi \in \dot{H}^1(G)$  und  $\varphi_h \in \dot{X}_h$ . Wie im Beweis von Satz 3.6 erhält man für die Wahl  $\varphi = \varphi_h$

$$B(\tilde{u} - \tilde{u}_h, \varphi_h) = -B(g - g_h, \varphi_h)$$

und mit den früher hergeleiteten Konstanten  $C_1$  und  $C_0$  für eine beliebige Funktion  $\tilde{v}_h \in \dot{X}_h$ :

$$\begin{aligned} C_0 \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{H^1(G)}^2 &\leq B(\tilde{u} - \tilde{u}_h, \tilde{u} - \tilde{u}_h) \\ &= B(\tilde{u} - \tilde{u}_h, \tilde{u} - \tilde{v}_h) + B(g - g_h, \tilde{u} - \tilde{v}_h) - B(g - g_h, \tilde{u} - \tilde{u}_h) \\ &\leq C_1 (\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{H^1(G)} \|\tilde{u} - \tilde{v}_h\|_{H^1(G)} + \|g - g_h\|_{H^1(G)} \|\tilde{u} - \tilde{v}_h\|_{H^1(G)} + \|g - g_h\|_{H^1(G)} \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{H^1(G)}) \end{aligned}$$

Dies ergibt die Ungleichung

$$\frac{C_0}{C_1} \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{H^1(G)}^2 \leq \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{H^1(G)} \|\tilde{u} - \tilde{v}_h\|_{H^1(G)} + \|g - g_h\|_{H^1(G)} \|\tilde{u} - \tilde{v}_h\|_{H^1(G)} + \|g - g_h\|_{H^1(G)} \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{H^1(G)}.$$

Wir verwenden nun die Youngsche Ungleichung aus Lemma 1.20 mit  $\epsilon = \frac{1}{2} \frac{C_0}{C_1}$  und erhalten die Abschätzung

$$\frac{1}{2} \frac{C_0}{C_1} \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{H^1(G)}^2 \leq \frac{C_1}{C_0} \left( \|\tilde{u} - \tilde{v}_h\|_{H^1(G)}^2 + \|g - g_h\|_{H^1(G)}^2 \right) + \|g - g_h\|_{H^1(G)} \|\tilde{u} - \tilde{v}_h\|_{H^1(G)}.$$

Daraus erhält man offensichtlich eine Abschätzung der Form

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{H^1(G)} \leq C \left( \|\tilde{u} - \tilde{v}_h\|_{H^1(G)} + \|g - g_h\|_{H^1(G)} \right) \tag{3.19}$$

mit einer nur von  $C_0$  und  $C_1$  abhängenden Konstanten  $C$ .

Wir werden im nächsten Paragraphen in Satz 3.9 beweisen, dass (zumindest für zulässig triangulierte Gebiete) Funktionen aus  $C^0(\bar{G}) \cap \dot{H}^1(G)$  auf dem Rand von  $G$  verschwinden. Nun ist nach unseren Voraussetzungen  $\tilde{u} \in H^{s+1}(G) \cap \dot{H}^1(G)$  mit einem  $s > \frac{n}{2} - 1$ . Der zweite Sobolevsche Einbettungssatz (Satz 2.30) garantiert dann, dass  $\tilde{u} \in C^0(\bar{G}) \cap \dot{H}^1(G)$  ist. Demnach ist  $u|_{\partial G} = 0$  und die Interpolierende  $I\tilde{u}$  gemäß Satz 2.26 liegt demnach in  $\dot{X}_h$ . Wir dürfen also in (3.19)  $\tilde{v}_h = I\tilde{u}$  wählen und erhalten mit Satz 2.26 die Abschätzung

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{H^1(G)} \leq C \left( \|\tilde{u} - I\tilde{u}\|_{H^1(G)} + \|g - g_h\|_{H^1(G)} \right) \leq C \left( C_I h^s |\tilde{u}|_{H^{s+1}(G)} + \|g - g_h\|_{H^1(G)} \right).$$

Wegen

$$|\tilde{u}|_{H^{s+1}(G)} = |u - g|_{H^{s+1}(G)} \leq |u|_{H^{s+1}(G)} + |g|_{H^{s+1}(G)}$$

und wegen

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{H^1(G)} = \|(u - g) - (u_h - g_h)\|_{H^1(G)} \geq \|u - u_h\|_{H^1(G)} - \|g - g_h\|_{H^1(G)}$$

folgt dann insgesamt

$$\|u - u_h\|_{H^1(G)} \leq C \left( |u|_{H^{s+1}(G)} + |g|_{H^{s+1}(G)} \right) h^s + C \|g - g_h\|_{H^1(G)},$$

mit nur von  $\sigma$ ,  $C_0$ ,  $C_1$  und  $C_I$  abhängenden Konstanten  $C$ . Man beachte, dass  $C_I$  auch von  $G$ ,  $s$ ,  $k$  und  $n$  abhängt. Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

### 3.4 Randwerte

Es ist nun endgültig zu klären, was es bedeutet, dass eine Funktion  $u \in \dot{H}^1(G)$  ist. Wir hatten diesen Funktionenraum sehr indirekt definiert. Für unsere Fehlerabschätzungen aus dem letzten Paragraphen benötigten wir jedoch z. B., dass eine Funktion aus  $C^0(\bar{G}) \cap \dot{H}^1(G)$  auf dem Rand eines polygonalen Gebietes  $G$  verschwindet. Wir werden sehen, dass für „gutartig“ berandete Gebiete diese Aussage gilt, für nicht „gutartig“ berandete Gebiete jedoch i. a. falsch ist.

Wir beginnen mit dem positiven Resultat. Der Rand von  $G$  bestehe zu einem Teil aus einem Ebenenstück, das ohne Beschränkung der Allgemeinheit als  $x_n = 0$  angenommen wird. Es gebe ein  $\delta > 0$  und ein beschränktes Gebiet  $\underline{G} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ , so dass

$$G \supset \{x = (\underline{x}, x_n) \mid \underline{x} \in \underline{G}, 0 < x_n < \delta\} =: G_\delta, \quad \partial G \supset \{(\underline{x}, 0) \mid \underline{x} \in \underline{G}\}. \tag{3.20}$$

Sei nun  $u \in C^0(\bar{G}) \cap \dot{H}^1(G)$ . Nach Definition von  $\dot{H}^1(G)$  gibt es zu  $u \in \dot{H}^1(G)$  eine Folge  $u_j \in C_0^1(G)$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) mit  $\|u - u_j\|_{H^1(G)} \rightarrow 0$  für  $j \rightarrow \infty$ . Insbesondere verschwindet  $u_j$  auf dem Rand von  $G$ . Sei nun  $\underline{x} \in \underline{G}$  fest gewählt. Dann ist also  $x = (\underline{x}, x_n)$  und wir erhalten

$$u_j(\underline{x}, x_n) = u_j(\underline{x}, x_n) - u_j(\underline{x}, 0) = \int_0^{x_n} \frac{\partial u_j}{\partial x_n}(\underline{x}, s) ds$$

und also auch

$$|u_j(\underline{x}, x_n)| \leq \int_0^\delta |\nabla u_j(\underline{x}, s)| ds \leq \sqrt{\delta} \left( \int_0^\delta |\nabla u_j(\underline{x}, s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

Wir quadrieren diese Ungleichung und integrieren bezüglich  $\underline{x}$  über  $\underline{G}$  und bezüglich  $x_n$  von 0 bis  $\delta$ . Damit erhalten wir

$$\int_{\underline{G}} \int_0^\delta |u_j(\underline{x}, x_n)|^2 dx_n d\underline{x} \leq \delta^2 \int_{\underline{G}} \int_0^\delta |\nabla u_j(\underline{x}, s)|^2 ds d\underline{x}.$$

Damit haben wir bewiesen, dass

$$\|u_j\|_{L^2(G_\delta)} \leq \delta \|\nabla u_j\|_{L^2(G)}$$

gilt. Und für  $j \rightarrow \infty$  (Stetigkeit der Norm!) erhalten wir

$$\|u\|_{L^2(G_\delta)} \leq \delta \|\nabla u\|_{L^2(G)}. \tag{3.21}$$

Wir beobachten nun, dass wegen der Stetigkeit von  $u$  in  $\overline{G}$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \|u\|_{L^2(G_\delta)}^2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\underline{G}} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta u(\underline{x}, x_n)^2 dx_n d\underline{x} = \int_{\underline{G}} u(\underline{x}, 0)^2 d\underline{x}.$$

ist. Wir verwenden noch (3.21) und erhalten

$$\int_{\underline{G}} u(\underline{x}, 0)^2 d\underline{x} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \|u\|_{L^2(G_\delta)}^2 \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \|\nabla u\|_{L^2(G)}^2 = 0.$$

Demnach folgt, dass  $u(\underline{x}, 0) = 0$  für  $\underline{x} \in \underline{G}$  ist. Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

**Satz 3.9** *Es liege die Situation (3.20) vor, und es sei  $u \in C^0(\overline{G}) \cap \dot{H}^1(G)$ . Dann folgt  $u(\underline{x}, 0) = 0$  für  $\underline{x} \in \underline{G}$ .*

Für uns ist diese Folgerung wichtig:

**Folgerung 3.10** *Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  zulässig so trianguliert, dass der Rand von  $G$  aus einer Vereinigung von  $n - 1$ -Simplexen besteht.*

*Ist dann  $u \in C^0(\overline{G}) \cap \dot{H}^1(G)$ , so ist  $u = 0$  auf  $\partial G$ .*

*Ist  $X_h$  ein Lagrange-Finite-Elemente-Raum wie in (3.17) und ist  $u_h \in X_h \cap \dot{H}^1(G)$ , so ist  $u_h = 0$  auf  $\partial G$ .*

*Insgesamt merken wir uns die Aussage:*

$$\{u_h \in X_h \mid u_h|_{\partial G} = 0\} = X_h \cap \dot{H}^1(G).$$

*Beweis.* Der Beweis dieser Folgerung ist klar, denn Funktionen aus  $X_h$  sind nach Definition stetig in  $\overline{G}$ . Die erste Aussage folgt direkt aus dem vorherigen Satz auf Randsimplex. Die Stetigkeit von  $u$  sorgt dann dafür, dass  $u$  auf dem gesamten Rand des Gebiets  $G$  verschwindet.  $\square$

An einem einfachen Beispiel sehen wir, dass für Gebiete mit einem nicht „gutartigen“ Rand Aussagen wie im vorigen Satz nicht zu erwarten sind. Dieses Beispiel kann man mit etwas mehr Aufwand auch für ein entsprechendes polygonal berandetes zulässig trianguliertes Gebiet aufschreiben.

**Beispiel 3.11** Als Gebiet wählen wir  $G = B_1(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ . Wir zeigen, dass für dieses Gebiet

$$\dot{H}^1(G) \cap C^0(\overline{G}) \neq \{u \in C^0(\overline{G}) \cap H^1(G) \mid u = 0 \text{ auf } \partial G\}$$

ist. Für  $n \geq 3$  ( $n = 2$  geht ähnlich) definiere  $u(x) = 1 - |x|$ . Man rechnet leicht nach, dass  $u \in H^1(G) \cap C^0(\overline{G})$  ist. Außerdem ist  $u \in \dot{H}^1(G)$ . Dazu konstruiert man eine Funktionenfolge  $u_\epsilon$  (und verwendet dann als Folge  $\epsilon = \frac{1}{j}$ ) von der Form  $u_\epsilon(x) = \eta_\epsilon(|x|)u(x)$ , wobei  $\eta_\epsilon \in C^1([0, 1])$  mit den Eigenschaften  $0 \leq \eta_\epsilon \leq 1$ ,  $\eta_\epsilon(|x|) = 0$  für  $|x| \leq \epsilon$ ,  $\eta_\epsilon(|x|) = 1$  für  $2\epsilon \leq |x| \leq 1$  und insgesamt  $|\eta'_\epsilon| \leq \frac{c}{\epsilon}$ . Man rechnet nun nach, dass

$$\|u - u_\epsilon\|_{L^2(G)} \leq \|1 - \eta_\epsilon\|_{L^2(G)}, \quad \|\nabla(u - u_\epsilon)\|_{L^2(G)} \leq \|1 - \eta_\epsilon\|_{L^2(G)} + \|\nabla \eta_\epsilon\|_{L^2(G)}$$

gilt und zeigt, dass

$$\|1 - \eta_\epsilon\|_{L^2(G)} \rightarrow 0 \ (\epsilon \rightarrow 0), \quad \|\nabla \eta_\epsilon\|_{L^2(G)} \leq c\epsilon^{\frac{n}{2}-1} \rightarrow 0 \ (\epsilon \rightarrow 0)$$

geht. Damit hat man gezeigt, dass  $u \in \dot{H}^1(G)$  liegt, jedoch  $u(0) = 1 \neq 0$  ist.

### 3.5 Monotone elliptische Probleme

In diesem Paragraphen untersuchen wir die numerische Approximation von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen, die sich aber formal in unsere funktionalanalytischen Methoden einordnen lassen. Der Vorteil ist hier, dass eine kleine Erweiterung der mathematischen Begriffe es erlaubt, ähnlich wie bei linearen Problemen vorzugehen. Als wichtigstes Beispiel untersuchen wir das Randwertproblem

$$-\nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f \text{ in } G, \quad u = 0 \text{ auf } \partial G. \quad (3.22)$$

Dabei ist  $p$  eine geeignete Zahl, die größer als 1 ist. Für  $p = 2$  reduziert sich diese Differentialgleichung auf die (lineare) Poissongleichung. Der geeignete Rahmen sind die sogenannten Monotonen Operatoren.

**Definition 3.12** Es sei  $X$  ein Banachraum und  $X'$  sein Dualraum. Eine Abbildung  $T : X \rightarrow X'$  heißt *monoton*, wenn

$$(T(x_1) - T(x_2))(x_1 - x_2) \geq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in X. \quad (3.23)$$

$T$  heißt *stark monoton*, wenn es eine monoton wachsende bijektive Funktion  $\mu : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  gibt, so dass

$$(T(x_1) - T(x_2))(x_1 - x_2) \geq \mu(\|x_1 - x_2\|_X) \|x_1 - x_2\|_X \quad \forall x_1, x_2 \in X. \quad (3.24)$$

Sehen wir uns zunächst an, wie die lineare Poissongleichung sich bezüglich dieser Monotonie verhält.

**Beispiel 3.13** Der Banachraum sei der Sobolevraum  $X = \dot{H}^1(G)$  mit der Norm  $\|v\|_X := (\int_G |\nabla v|^2)^{1/2}$ . Dann definieren wir

$$T(u)\varphi = \int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi$$

für  $u \in \dot{H}^1(G)$  und  $\varphi \in \dot{H}^1(G)$ . Den Dualraum von  $\dot{H}^1(G)$  haben wir mit  $H^{-1}(G)$  bezeichnet. (Da wir nun eine andere Norm verwenden ist dies formal widersprüchlich zur bisherigen Definition. Dies ist aber eine im Moment unwichtige Bezeichnungsfrage.) Zunächst ist  $T$  eine Abbildung von  $X$  nach  $X'$ , denn die Abbildungseigenschaft  $T : \dot{H}^1(G) \rightarrow H^{-1}(G)$ , ist klar, denn

$$|T(u)\varphi| \leq \|\nabla u\|_{L^2(G)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(G)},$$

und damit ist

$$\|T(u)\|_{H^{-1}(G)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(G)} = \|u\|_X.$$

Außerdem ist  $T(u)$  lineare Abbildung. Die Monotonie sehen wir leicht wie folgt ein:

$$\begin{aligned} (T(u_1) - T(u_2))(u_1 - u_2) &= T(u_1)(u_1 - u_2) - T(u_2)(u_1 - u_2) \\ &= \int_G \nabla u_1 \cdot \nabla(u_1 - u_2) - \int_G \nabla u_2 \cdot \nabla(u_1 - u_2) \\ &= \int_G |\nabla(u_1 - u_2)|^2 = \|u_1 - u_2\|_X^2 \end{aligned}$$

Also ist es vernünftig,  $\mu(s) = s$  zu wählen, und  $T$  ist stark monoton.

Damit haben wir den Fall  $p = 2$  untersucht. Uns interessiert aber vor allem die nichtlineare Gleichung. Deshalb sei im folgenden Beispiel  $p > 2$ .

**Beispiel 3.14** Hier wählen wir als Banachraum  $X = \dot{H}^{1,p}(G)$ ,  $\|u\|_X = (\int_G |\nabla u|^p)^{1/p}$  mit dem Dualraum  $X' = H^{-1,p'}(G)$ . Wir definieren für  $u, \varphi \in X$

$$T(u)\varphi := \int_G |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi. \quad (3.25)$$

Zunächst weisen wir nach, dass für festes  $u \in X$  durch  $T(u)$  eine lineare Abbildung von  $X$  nach  $\mathbb{R}$  gegeben ist. Die Linearität ist dabei klar. Für  $\varphi \in X$  ist  $T(u)\varphi \in \mathbb{R}$ , denn mit der Hölderschen Ungleichung folgt

$$|T(u)\varphi| \leq \int_G |\nabla u|^{p-1} |\nabla \varphi| \leq \left( \int_G |\nabla u|^{(p-1)p'} \right)^{1/p'} \left( \int_G |\nabla \varphi|^p \right)^{1/p} = \|u\|_X^{p-1} \|\varphi\|_X.$$

Also folgt

$$\|T(u)\|_{X'} \leq \|u\|_X^{p-1}.$$

Der Nachweis der Monotonie ist etwas schwieriger. Zunächst erhalten wir für  $u_1, u_2 \in X$

$$\begin{aligned} (T(u_1) - T(u_2))(u_1 - u_2) &= \int_G |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \cdot \nabla(u_1 - u_2) - \int_G |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2 \cdot \nabla(u_1 - u_2) \\ &= \int_G (|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2) \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Damit reduziert sich der Nachweis von (3.24) auf ein Problem im  $\mathbb{R}^n$ , für das wir folgendes kleine Lemma formulieren. Der Beweis bleibt dem Leser überlassen.

**Lemma 3.15** *Es sei  $p \geq 2$ . Dann gibt es eine Konstante  $c_0 > 0$ , so dass für alle  $a, b \in \mathbb{R}^n$  gilt:*

$$(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b) \cdot (a - b) \geq c_0|a - b|^p.$$

Mit diesem Resultat erhalten wir sofort aus (3.26)

$$(T(u_1) - T(u_2))(u_1 - u_2) \geq c_0 \int_G |\nabla(u_1 - u_2)|^p = c_0 \|u_1 - u_2\|_X^p$$

und können  $\mu(s) = c_0 s^{p-1}$  als Monotoniefunktion wählen.

Für die Fehlerabschätzung zwischen kontinuierlicher und diskreter Lösung benötigen wir noch eine Information über die Glattheit der Abbildung  $T$ . Dazu definieren wir, wann eine solche Abbildung lokal Lipschitz-stetig ist.

**Definition 3.16**  $T : X \rightarrow X'$  heißt lokal Lipschitz-stetig, wenn gilt:

$$\forall R > 0 \quad \exists L(R) \quad \forall u_1, u_2 \in B_R(0) \subset X : \|T(u_1) - T(u_2)\|_{X'} \leq L(R) \|u_1 - u_2\|_X.$$

Für unser einfaches Beispiel 3.13, d. h. für  $p = 2$  erhalten wir sofort

$$|(T(u_1) - T(u_2))\varphi| = |T(u_1 - u_2)\varphi| = \left| \int_G \nabla(u_1 - u_2) \nabla \varphi \right| \leq \|u_1 - u_2\|_X \|\varphi\|_X,$$

also auch

$$\|T(u_1) - T(u_2)\|_{X'} \leq \|u_1 - u_2\|_X$$

und damit Lipschitz-Stetigkeit mit Lipschitz-Konstante 1.

Für die Lipschitzstetigkeit der Abbildung  $T$  aus unserem Beispiel benötigen wir wieder ein kleines

**Lemma 3.17** *Es gibt eine Konstante  $c_1 > 0$ , so dass für alle  $a, b \in \mathbb{R}^n$  gilt:*

$$\||a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b| \leq c_1(|a| + |b|)^{p-2}|a - b|.$$

Mit der Definition (3.25) erhalten wir also

$$\begin{aligned} |(T(u_1) - T(u_2))\varphi| &\leq \int_G \||\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2| |\nabla \varphi| \\ &\leq c_1 \int_G (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{p-2} |\nabla(u_1 - u_2)| |\nabla \varphi| \\ &\leq c_1 \left( \int_G \{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{p-2} |\nabla(u_1 - u_2)|\}^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \|\nabla \varphi\|_{L^p(G)} \\ &= c_1 \|\varphi\|_X \left( \int_G (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{p'(p-2)} |\nabla(u_1 - u_2)|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq c_1 \|\varphi\|_X \left( \int_G (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{p'(p-2)q'} \right)^{\frac{1}{p'q'}} \left( \int_G |\nabla(u_1 - u_2)|^{p'q} \right)^{\frac{1}{p'q}}. \end{aligned}$$

Nun ist  $p'q = p$ , also  $q = \frac{p}{p'} = p(1 - \frac{1}{p}) = p - 1 > 1$ , und wir können weiter schließen

$$\begin{aligned} &= c_1 \|\varphi\|_X \|u_1 - u_2\|_X \left( \int_G (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{p'(p-2)q'} \right)^{\frac{1}{p'q'}} \\ &= c_1 \|\varphi\|_X \|u_1 - u_2\|_X \|\nabla u_1 + \nabla u_2\|_X^{p-2} \\ &\leq c_1 \|\varphi\|_X \|u_1 - u_2\|_X (\|u_1\|_X + \|u_2\|_X)^{p-2}. \end{aligned}$$

Damit haben wir das Hauptbeispiel 3.14 als stark monoton und Lipschitz-stetig erkannt. Für solche nichtlinearen Gleichungen lässt sich sehr einfach eine abstrakte Fehlerabschätzung nachweisen.

**Satz 3.18** *Es sei  $X$  ein normierter Raum,  $T : X \rightarrow X'$ , eine Abbildung mit  $T(0) = 0$ .  $T$  sei lokal Lipschitz-stetig und stark monoton mit Monotoniefunktion  $\mu$ . Außerdem sei  $f \in X'$ .  $X_h \subset X$  bezeichne einen Teilraum. Ist dann  $u \in X$  Lösung von*

$$T(u) = f \quad \text{in } X', \quad (3.27)$$

und  $u_h \in X_h$  Lösung von

$$T(u_h) = f_h \quad \text{in } X'_h, \quad (3.28)$$

zu  $f_h := f|_{X_h}$ , so folgt

$$\mu(\|u - u_h\|_X) \leq c \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X \quad (3.29)$$

mit der Konstanten  $c = L(\mu^{-1}\|f\|_{X'})$ .

*Beweis.* Zunächst beweisen wir die A-Priori-Abschätzungen für die kontinuierliche und die diskrete Lösung. Gleichung (3.27) besagt ausgeschrieben, dass

$$T(u)\varphi = f(\varphi) \quad \forall \varphi \in X.$$

Wir setzen  $\varphi = u$  ein und erhalten mit (3.24)

$$\mu(\|u\|_X)\|u\|_X = \mu(\|u - 0\|_X)\|u - 0\|_X \leq (T(u) - T(0))(u - 0) = T(u)u = f(u) \leq \|f\|_{X'} \|u\|_X. \quad (3.30)$$

und damit die Abschätzung

$$\mu(\|u\|_X) \leq \|f\|_{X'}$$

und wegen der Monotonie von  $\mu$  auch

$$\|u\|_X \leq \mu^{-1}(\|f\|_{X'}) =: R.$$

Genauso folgt aus (3.28)

$$\|u_h\|_X \leq \mu^{-1}(\|f\|_{X'}).$$

Damit ist gezeigt, dass sowohl kontinuierliche als auch diskrete Lösung im Raum  $X$  in einer festen von  $h$  unabhängigen Kugel vom Radius  $R$  enthalten sind. Dies erlaubt uns die gleich folgende Ungleichungskette, in der wir die lokale Lipschitz-stetigkeit und die Monotonie verwenden. Zunächst beobachten wir, dass für  $\varphi_h \in X_h$  wegen  $X_h \subset X$ :

$$(T(u) - T(u_h))\varphi_h = f(\varphi_h) - f(\varphi_h) = 0.$$

Damit erhalten wir für beliebiges  $v_h \in X_h$ :

$$\begin{aligned} \mu(\|u - u_h\|_X)\|u - u_h\|_X &\leq (T(u) - T(u_h))(u - u_h) \\ &= (T(u) - T(u_h))(u - v_h) \\ &\leq \|T(u) - T(u_h)\|_{X'} \|u - v_h\|_X \\ &\leq L(R)\|u - u_h\|_X \|u - v_h\|_X. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\mu(\|u - u_h\|_X) \leq L(R)\|u - v_h\|_X$$

beziehungsweise

$$\mu(\|u - u_h\|_X) \leq L(R) \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X.$$

□

Wir wenden diesen abstrakten Satz auf die  $p$ -harmonischen Funktionen an. Es sei  $u \in \mathring{H}^{1,p}(G)$  schwache Lösung von (3.22) in  $G$ , d. h.

$$\int_G |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_G f \varphi \quad \forall \varphi \in \mathring{H}^{1,p}(G),$$

wobei wir  $f \in L^{p'}(G)$  voraussetzen. Das bedeutet, dass wir

$$f(\varphi) = \int_G f \varphi \quad \forall \varphi \in \mathring{H}^{1,p}(G)$$

setzen (auch wenn das einen Missbrauch der Bezeichnung  $f$  bedeutet).

Das Gebiet  $G$  sei zulässig trianguliert durch die Triangulierung  $\mathcal{T}$ . Als diskreten Teilraum von  $X$  wählen wir Finite Elemente  $k$ -ter Ordnung:

$$X_h = \{u_h \in C^0(\overline{G}) \mid u_h|_T \in \mathbb{P}_k(T), T \in \mathcal{T}\}, \quad \mathring{X}_h := X_h \cap \mathring{H}^{1,p}(G). \quad (3.31)$$

Sei  $u_h \in \mathring{X}_h$  eine diskrete Lösung von (3.22), d. h.

$$\int_G |\nabla u_h|^{p-2} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_h = \int_G f \varphi_h \quad \forall \varphi_h \in \mathring{X}_h.$$

Dann liefert der vorherige Satz eine Abschätzung des Fehlers zwischen kontinuierlicher und diskreter Lösung.

$$\mu(\|u - u_h\|_X) \leq c \inf_{v_h \in \mathring{X}_h} \|u - v_h\|_X.$$

Setzen wir die zugehörige Monotoniefunktion  $\mu(s) = s^{p-1}$  ein, so erhalten wir schließlich

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^p(G)} \leq c \left( \inf_{v_h \in \mathring{X}_h} \|\nabla(u - v_h)\|_{L^p(G)} \right)^{\frac{1}{p-1}}. \quad (3.32)$$

Nehmen wir an, dass  $u \in H^{2,p}(G)$  ist, so folgt mit den Interpolationsabschätzungen bei der speziellen Wahl  $v_h = Iu$

$$\|\nabla(u - Iu)\|_{L^p(G)} \leq c h^s |u|_{H^{s+1,p}(G)},$$

falls  $\sigma \leq c$ ,  $p > \frac{n}{2}$ , und  $0 \leq s \leq k$ . Dies jedoch nur dann, wenn  $u \in H^{s+1,p}(G)$  ist. Ob diese Regularität erreichbar ist, müsste noch untersucht werden. Damit haben wir bis auf die Existenzaussage für die diskrete Gleichung den folgenden Satz bewiesen. Die Existenz und Eindeutigkeit im diskreten Fall wird in einer Übungsaufgabe bewiesen.

**Satz 3.19** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet, das zulässig trianguliert ist. Sei weiter  $\sigma \leq c$ ,  $p > \frac{n}{2}$ , und  $f \in L^{p'}(G)$ .  $X_h$  sei der Raum Finiter Elemente  $k$ -ter Ordnung aus (3.31). Es sei  $u \in \mathring{H}^{1,p}(G)$  für ein  $0 \leq s \leq k$  eine Lösung von

$$\int_G |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_G f \varphi \quad \forall \varphi \in \mathring{H}^{1,p}(G)$$

zu  $f \in L^{p'}(G)$ . Dann gibt es genau ein  $u_h \in \mathring{X}_h$  so dass

$$\int_G |\nabla u_h|^{p-2} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_h = \int_G f \varphi_h \quad \forall \varphi_h \in \mathring{X}_h,$$

und es gilt:

$$\|u - u_h\|_{H^{1,p}(G)} \leq c h^{\frac{s}{p-1}} |u|_{H^{s+1,p}(G)},$$

falls zusätzlich  $u \in H^{s+1,p}(G)$  ist.

**Beispiel 3.20** Wir betrachten ein Beispiel für eine Lösung der  $p$ -harmonischen Gleichung in einer Raumdimension, um die Problematik der Regularität dieser Gleichung zu verstehen. Wir wählen  $G = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ ,  $a \geq 0$ ,  $1 < p < \infty$ . Dann ist

$$u(x) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) a^{\frac{1}{p-1}} (1 - |x|^{\frac{p}{p-1}}) \quad (x \in \overline{G}).$$

eine Funktion aus  $\dot{H}^{1,p}(G)$ , die der Differentialgleichung

$$\int_G |u'|^{p-2} u' \varphi' = \int_G a \varphi \quad \forall \varphi \in \dot{H}^{1,p}(G)$$

genügt. Man rechne dies nach. Ebenso leicht sieht man, dass diese Lösung nur für Exponenten  $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < p < \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2}$  auch in  $H^{2,p}(G)$  liegt.

### 3.6 Das Neumann–Problem

Im folgenden sei  $G$  so, dass der Gaußsche Integralsatz gilt. Bisher wurden nur Dirichlet–Probleme untersucht, d.h. Probleme mit vorgeschriebenen Randwerten. Erinnern wir uns an das physikalische Beispiel aus der Einleitung, so sehen wir, dass es wichtig ist, Probleme vom Neumannschen Typ zu approximieren. Dies sind Probleme, bei denen eine geeignete Ableitung der Lösung in nicht–tangentialer Richtung auf dem Rand des Gebietes vorgeschrieben wird. Es reicht uns, das Modellproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } G, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial G \quad (3.33)$$

zu betrachten. Wieder lösen wir unser Problem durch Minimieren eines geeigneten Funktionals,

$$I(v) = \frac{1}{2} \int_G |\nabla v|^2 - \int_G f v \quad (v \in X = H^1(G)).$$

Man zeigt, dass glatte Minima  $u$  automatisch die Randbedingung (3.33) erfüllen. Sei also  $u \in C^1(\overline{G})$  so, dass

$$I(u) \leq I(v) \quad \forall v \in C^1(\overline{G})$$

ist. Ist  $\varphi \in C^1(\overline{G})$  beliebig vorgegeben, so ist also für  $\phi(\varepsilon) = I(u + \varepsilon\varphi)$ ,

$$\phi(0) \leq \phi(\varepsilon) \quad (\varepsilon \in \mathbb{R}),$$

also auch  $\phi'(0) = 0$ , und das bedeutet

$$\int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi - \int_G f \varphi = 0.$$

Ist nun  $u$  sogar aus  $C^2(\overline{G})$ , so liefert eine partielle Integration, dass gilt:

$$\int_G (-\Delta u - f) \varphi + \int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C^1(\overline{G}). \quad (3.34)$$

Für jedes  $\varphi \in C_0^1(G)$  ist also

$$\int_G (-\Delta u - f) \varphi = 0,$$

das heißt

$$-\Delta u = f \quad \text{in } G.$$

Indem wir dies in (3.34) einsetzen, folgt:

$$\int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C^1(\overline{G}),$$

und das bedeutet, dass  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$  auf  $\partial G$  ist. Diese Randbedingung ist also eine natürliche Randbedingung für  $-\Delta$ , was praktisch zur Folge hat, dass wir sie gar nicht implementieren müssen. Der zugehörige schwache Existenzsatz lautet dann (beachte, dass  $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial G}$  nicht definiert ist!):

**Satz 3.21** Zu einem beschränkten Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  und rechter Seite  $f \in (H^1(G)/\mathbb{R})'$  gibt es eine bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmte schwache Lösung von

$$-\Delta u = f \text{ in } G, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ auf } \partial G,$$

d.h. es gibt genau ein  $u \in H^1(G)/\mathbb{R}$ , so dass für jedes  $\varphi \in H^1(G)/\mathbb{R}$  gilt:

$$\int_G \nabla u \nabla \varphi = f(\varphi).$$

Es ist klar, dass eine Lösung von (3.33) nur bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist. Das Problem (3.33) ist aber nicht für beliebige rechte Seiten lösbar, denn für glattes  $u$  und  $f$  hat man

$$\int_G f = \int_G -\Delta u = - \int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0.$$

*Beweis.* Wir verwenden den Satz von Lax-Milgram für

$$\bar{v}, \bar{w} \in X = H^1(G)/\mathbb{R}, \quad (\bar{v}, \bar{w})_X = \int_G \nabla v \nabla w,$$

wobei  $\bar{v} = v + \mathbb{R}$ ,  $\bar{w} = w + \mathbb{R}$  sind.  $X$  ist damit ein Hilbertraum, denn aus  $(\bar{v}, \bar{v})_X = 0$  folgt, dass  $v$  konstant, also  $\bar{v} = 0$  ist. Die Bilinearform

$$B(\bar{v}, \bar{w}) = \int_G \nabla v \nabla w \quad (\bar{v}, \bar{w} \in X)$$

ist wegen  $B(\bar{v}, \bar{v}) = \|\bar{v}\|_X^2$  stetig und koerziv (mit  $c_0 = c_1 = 1$ ).  $f \in X'$  nach Voraussetzung. Damit gibt es genau ein  $\bar{u} \in X$ , so dass für alle  $\bar{\varphi} \in X$

$$\int_G \nabla u \nabla \varphi = f(\varphi).$$

□

**Beispiel 3.22** Wenn die rechte Seite eine Funktion  $f \in L^2(G)$  ist und wie üblich  $f(\bar{\varphi}) = \int_G f \varphi$  ( $\bar{\varphi} \in X$ ) gewählt wird, dann ist zwar  $f \in H^1(G)'$ , aber wir benötigen  $f \in X'$ . Damit ist notwendig wegen  $\bar{0} = \mathbb{R}$ ,

$$f(\bar{0}) = \int_G f \cdot 1 = 0. \tag{3.35}$$

Wir versuchen, die Beschränktheit nachzuweisen. Dazu sei  $\varphi \in H^1(G)$ ,  $\bar{\varphi} = \varphi + \mathbb{R}$ . Dann ist wegen (3.35)

$$|f(\bar{\varphi})| = \left| \int_G f \varphi \right| = \left| \int_G f(\varphi - \int_G \varphi) \right| \leq \|f\|_{L^2(G)} \|\varphi - \int_G \varphi\|_{L^2(G)},$$

und wegen der Poincaréungleichung mit Mittelwert Null (Satz 2.14)

$$\leq \|f\|_{L^2(G)} c \|\nabla \varphi\|_{L^2(G)} = c \|f\|_{L^2(G)} \|\bar{\varphi}\|_X.$$

Nachdem das theoretische Existenzproblem für (3.33) gelöst ist, versuchen wir Konvergenz für das analoge diskrete Problem nachzuweisen. Ein endlichdimensionaler Teilraum von  $X = H^1(G)/\mathbb{R}$  hilft uns praktisch nicht weiter, denn wie sollte man mit  $\bar{u} = u + \mathbb{R}$  rechnen? Deshalb legen wir die freie Konstante durch

$$\int_G u = 0 \tag{3.36}$$

fest. Diese Bedingung ist gegenüber allen anderen Festlegungen der freien Konstante ausgezeichnet, denn

$$\|v\|_{H^1(G)/\mathbb{R}} = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|v + c\|_{H^1(G)}.$$

Wegen

$$\|v + c\|_{H^1(G)}^2 = \|v + c\|_{L^2(G)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(G)}^2 = \|v\|_{L^2(G)}^2 + 2c \int_G v + c^2 |G| + \|\nabla v\|_{L^2(G)}^2$$

lässt sich das Minimum der Funktion  $\phi(c) = \|v + c\|_{H^1(G)}^2$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) ausrechnen. Es ist nämlich

$$\phi'(c) = 2 \int_G v + 2c|G|, \quad \phi''(c) = 2|G|$$

und demnach

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \phi(c) = \phi(c_0)$$

mit

$$c_0 = -\frac{1}{|G|} \int_G v = -\int_G v.$$

Das bedeutet, dass wir bewiesen haben:

**Lemma 3.23**

$$\|v\|_{H^1(G)/\mathbb{R}} = \|v - \int_G v\|_{H^1(G)}$$

Demnach dürfen wir gleich mit Funktionen arbeiten, die Mittelwert Null besitzen, für die also (3.36) gilt.

Nach Satz 3.21 und Beispiel 3.22 gibt es zu  $f \in L^2(G)$  mit  $\int_G f = 0$  genau ein  $u \in H^1(G)$  mit (3.36) und

$$\int_G \nabla u \nabla \varphi = \int_G f \varphi \quad \forall \varphi \in H^1(G).$$

Ist nun  $X_h$  ein endlichdimensionaler Teilraum von  $X = \{v \in H^1(G) \mid \int_G v = 0\}$ , so gibt es genau ein  $u_h \in X_h$  mit

$$\int_G \nabla u_h \nabla \varphi_h = \int_G f \varphi_h \quad \forall \varphi_h \in X_h.$$

Hierbei wurde wieder verwendet, dass wegen Hilfssatz 2.14 der Raum  $X$  mit der Norm  $\|v\|_X = \|\nabla v\|_{L^2(G)}$  ein Hilbertraum ist. Der abstrakte Satz 3.6 liefert dann die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_X \leq \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X \leq c h^s \|u\|_{H^{s+1}(G)}$$

für geeignetes  $X_h$  und reguläres  $u$ . Damit haben wir folgendes Resultat bewiesen.

**Satz 3.24** *Das beschränkte Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  sei zulässig trianguliert. Zu  $f \in L^2(G)$  mit  $\int_G f = 0$  sei  $u \in H^1(G)$  mit  $\int_G u = 0$  die schwache Lösung des Neumannschen Randwertproblems gemäß Satz 3.21. Ist  $X_h \subset H^1(G)$  ein endlichdimensionaler Raum mit*

$$\inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_{H^1(G)} \leq c h^{s+1} \|u\|_{H^{s+1}(G)},$$

so gibt es genau eine diskrete Lösung  $u_h \in X_h$  mit  $\int_G u_h = 0$  und

$$\|u - u_h\|_{H^1(G)} \leq c h^{s+1} \|u\|_{H^{s+1}(G)}.$$

Die Diskretisierung des Neumannproblems gestaltet sich also einfacher als die Diskretisierung des Dirichletproblems. Ist  $X_h = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ , so ist das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^m u_j \int_G \nabla \varphi_j \nabla \varphi_k = \int_G f \varphi_k \quad (k = 1, \dots, m) \quad (3.37)$$

zur Bestimmung von

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^m u_j \varphi_j(x)$$

zu lösen. Es sind also keinerlei Randwerte zu implementieren. Allerdings ist (3.37) nicht eindeutig lösbar, denn  $u_h$  ist nur bis auf Konstanten eindeutig bestimmt. Als Nebenbedingung muss die Bedingung (3.36) implementiert werden, d.h.

$$\sum_{j=1}^m u_j \int_G \varphi_j = 0. \tag{3.38}$$

Die Neumann-Bedingung  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$  auf  $\partial G$  ist, wie wir gesehen haben, die natürliche Randbedingung zu  $-\Delta$ . Man hüte sich aber davor anzunehmen, dass auch  $\frac{\partial u_h}{\partial \nu} = 0$  auf  $\partial G$  ist. Am besten sieht man das am eindimensionalen Fall.

**Beispiel 3.25** Ist  $u_h$  diskrete Lösung von

$$-u'' = f \text{ in } G = (0, 1), \quad u'(0) = u'(1) = 0,$$

zu stückweise linearen Elementen, so folgt

$$|u'_h(0)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \|f\|_{L^2(0,h)} \sqrt{h}.$$

Nehmen wir an, dass die Triangulierung  $\mathcal{T}$  von  $(0, 1)$  das Intervall  $[0, h]$  enthält. Dann dürfen wir in der diskreten Gleichung

$$\int_0^1 u'_h \varphi'_h = \int_0^1 f \varphi_h \tag{3.39}$$

als Testfunktion die Basisfunktion zum linken Randknoten,

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{h}, & x \in [0, h] \\ 0, & x \in (h, 1] \end{cases}$$

einsetzen. Auf  $[0, h]$  sieht die diskrete Lösung so aus:

$$u_h(x) = u_0 + \frac{x}{h}(u_1 - u_0), \quad u_0 = u_h(0), \quad u_1 = u_h(h),$$

und demnach ist

$$u'_h(0) = \frac{u_1 - u_0}{h}.$$

Aus (3.39) erhalten wir mit  $\varphi_h = \varphi_0$ ,

$$\int_0^h \frac{u_1 - u_0}{h} \left(-\frac{1}{h}\right) dx = \int_0^h f(x) \left(1 - \frac{x}{h}\right) dx,$$

woraus folgt

$$u'_h(0) = \frac{u_1 - u_0}{h} = - \int_0^h f(x) \left(1 - \frac{x}{h}\right) dx,$$

und die rechte Seite ist im allgemeinen nicht gleich Null. Es folgt dann

$$|u'_h(0)| \leq \left(\int_0^h f(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^h \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2(0,h)} \sqrt{\frac{h}{3}}.$$

Es bleibt dem Leser überlassen, eine analoge Abschätzung von  $\frac{\partial u_h}{\partial \nu}$  auf Randsimplex in höheren Raumdimensionen herzuleiten.

### 3.7 A-Priori-Abschätzungen

Wir haben bisher lineare elliptische partielle Differentialgleichungen gelöst und mit Finiten Elementen beliebiger Ordnung diskretisiert. Außerdem haben wir Fehlerabschätzungen zwischen kontinuierlicher Lösung  $u$  und diskreter Lösung  $u_h$  bewiesen, die für Nullrandwerte  $g = 0$  von der Form

$$\|u - u_h\|_{H^1(G)} \leq ch^s |u|_{H^{s+1}(G)}$$

waren. Auf der rechten Seite steht eine Norm der kontinuierlichen Lösung, die wir aber gerade approximieren wollen. Deshalb ist es notwendig und wichtig, diese Norm durch die Daten des Problems abzuschätzen. Erst dann hat man eine aussagekräftige Fehlerabschätzung. Außerdem wäre nachzuweisen, dass unter geeigneten Annahmen an die Daten des Problems und an das Gebiet die schwache Lösung auch wirklich in  $H^{s+1}(G)$  liegt.

**Beispiel 3.26** Für eine Raumdimension sind diese Probleme leicht zu erledigen. Hier ist  $G = (a, b)$  mit  $-\infty < a < b < \infty$ , und für die schwache Lösung gilt  $u \in \dot{H}^1(G)$  und

$$\int_G u' \varphi' = \int_G f \varphi \quad \forall \varphi \in \dot{H}^1(G).$$

Dabei sei  $f \in L^2(G)$ . Dann ist  $u \in H^2(G)$ , denn es gibt ja eine Funktion  $v \in L^2(G)$ , nämlich  $v = -f$ , so dass  $\forall \varphi \in C_0^\infty(G)$  gilt:

$$\int_G u' \varphi' = - \int_G v \varphi.$$

Nach Definition der schwachen Ableitung ist demnach  $u'' = v = -f$  und

$$- \int_G u'' \varphi = \int_G f \varphi \quad \forall \varphi \in L^2(G).$$

Also folgt insbesondere auch

$$\|u''\|_{L^2(G)} \leq \|f\|_{L^2(G)}.$$

Damit haben wir gezeigt, dass die schwache Lösung in  $H^2(G)$  liegt und die A-Priori-Abschätzung  $|u|_{H^2(G)} \leq \|f\|_{L^2(G)}$  gilt. Erst nun erhalten wir unter den üblichen Annahmen die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_{H^1(G)} \leq ch \|f\|_{L^2(G)}$$

für lineare Finite Elemente. Den allgemeinen Fall  $s > 1$  erledige man unter geeigneten Annahmen selbst.

Aus Zeitgründen beweisen wir im folgenden lediglich eine A-Priori-Abschätzung für die  $H^2(G)$ -Norm einer schwachen Lösung unter geeigneten Annahmen an die Daten und unter der Annahme, dass wir bereits wissen, dass  $u \in H^2(G)$  ist. Wir schätzen die Norm  $\|u\|_{H^2(G')}$  für ein beliebiges  $G' \subset\subset G$  ab.

Sei  $u \in \dot{H}^1(G) \cap H^3(G)$  (die Reduktion auf  $H^2(G)$  überlege man sich mittels eines Approximationsarguments selbst), und es sei die schwache Differentialgleichung erfüllt:

$$\int_G \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \varphi_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u \varphi_{x_i} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} \varphi + c u \varphi \right) = \int_G \left( f \varphi + \sum_{i=1}^n G_i \varphi_{x_i} \right) \quad \forall \varphi \in \dot{H}^1(G)$$

Sei nun  $\eta \in C_0^1(G)$  mit  $0 \leq \eta \leq 1$  und  $|\nabla \eta| \leq c$ . Setze für festes  $k$  als Testfunktion in die schwache Differentialgleichung ein

$$\varphi = (u_{x_k} \eta^2)_{x_k} \in \dot{H}^1(G).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int_G \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} (u_{x_k} \eta^2)_{x_k x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u (u_{x_k} \eta^2)_{x_k x_i} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} (u_{x_k} \eta^2)_{x_k} + c u (u_{x_k} \eta^2)_{x_k} \right) \\ &= \int_G \left( f (u_{x_k} \eta^2)_{x_k} + \sum_{i=1}^n G_i (u_{x_k} \eta^2)_{x_k x_i} \right). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Wir sehen uns die einzelnen Terme in dieser Gleichung nun separat an und schätzen sie geeignet ab. Dabei verwenden wir Eigenschaften der Koeffizienten der Differentialgleichung, die über die bisher geforderten Eigenschaften hinausgehen. Im Satz werden diese Eigenschaften dann vorausgesetzt werden.

Der 1. Term auf der linken Seite von (3.40) wird so abgeschätzt:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j=1}^n \int_G a_{ij} u_{x_i} (u_{x_k} \eta^2)_{x_k x_j} = - \sum_{i,j=1}^n \int_G (a_{ij} u_{x_i})_{x_k} (u_{x_k} \eta^2)_{x_j} \\
 & = - \sum_{i,j=1}^n \int_G (a_{ij} u_{x_i x_k} + a_{ij x_k} u_{x_i}) (u_{x_k x_j} \eta^2 + 2u_{x_k} \eta \eta_{x_j}) \\
 & = - \sum_{i,j=1}^n \int_G (a_{ij} u_{x_i x_k} u_{x_j x_k} \eta^2 + 2a_{ij} u_{x_i x_k} \eta u_{x_k} \eta_{x_j} + a_{ij x_k} u_{x_i} \eta^2 u_{x_k x_j} + 2a_{ij x_k} u_{x_i} u_{x_k} \eta \eta_{x_j}) \\
 & \leq - \sum_{i,j=1}^n \int_G a_{ij} u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} \eta^2 + 2 \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty(G)} \int_G |u_{x_i x_k}| |\eta| |u_{x_k}| |\eta_{x_j}| \\
 & \quad + \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij x_k}\|_{L^\infty(G)} \int_G |u_{x_i}| \eta^2 |u_{x_k x_j}| + 2 \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij x_k}\|_{L^\infty(G)} \int_G |u_{x_i}| |u_{x_k}| \eta |\eta_{x_j}| \\
 & \leq - \sum_{i,j=1}^n \int_G a_{ij} u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} \eta^2 + c \sum_{i,j=1}^n \left( \int_G (u_{x_i x_k})^2 \eta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_G |n_{x_k}|^2 \eta_{x_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad + c \sum_{i,j=1}^n \left( \int_G u_{x_k x_j}^2 \eta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_G u_{x_i}^2 \eta^2 \right)^{\frac{1}{2}} + c \int_G |\nabla u|^2 \eta |\nabla \eta|,
 \end{aligned}$$

und  $c$  hängt hier ab von  $\|a_{ij}\|_{H^{1,\infty}(G)}$ , ( $i, j = 1, \dots, n$ ) und im folgenden auch von  $\|\nabla \eta\|_{L^\infty(G)}$ . Wir schätzen mit der Youngschen Ungleichung für  $\varepsilon > 0$  weiter ab:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j=1}^n \int_G a_{ij} u_{x_i} (u_{x_k} \eta^2)_{x_k x_j} \\
 & \leq - \sum_{i,j=1}^n \int_G a_{ij} u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} \eta^2 + \varepsilon \int_G |D^2 u|^2 \eta^2 + c(\varepsilon) \int_G |\nabla u|^2
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Hierbei verwenden wir die Abkürzung  $|D^2 u|^2 = \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}^2$ .

2. Term auf der linken Seite von (3.40): Die Konstanten hängen in der folgenden Abschätzung von  $\|a_i\|_{H^{1,\infty}(G)}$  für  $i = 1, \dots, n$  ab.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^n \int_G a_i u (u_{x_k} \eta^2)_{x_k x_i} = - \sum_{i=1}^n \int_G (a_i u)_{x_i} (u_{x_k} \eta^2)_{x_k} \\
 & = - \sum_{i=1}^n \int_G (a_{i x_i} u + a_i u_{x_i}) (u_{x_k x_k} \eta^2 + 2u_{x_k} \eta \eta_{x_k}) \\
 & \leq c \int_G (|u| + |\nabla u|) (|D^2 u| \eta^2 + |\nabla u| \eta |\nabla \eta|) \\
 & \leq c \int_G (|\nabla u| |D^2 u| \eta^2 + |u| |D^2 u| \eta^2 + |u| |\nabla u| + |\nabla u|^2) \\
 & \leq \varepsilon \int_G |D^2 u|^2 \eta^2 + c(\varepsilon) \int_G (|\nabla u|^2 + |u|^2)
 \end{aligned}$$

3. Term auf der linken Seite von (3.40): Hier hängen die Konstanten von  $\|b_i\|_{L^\infty(G)}$  für  $i = 1, \dots, n$  ab.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_G b_i u_{x_i} (u_{x_k} \eta^2)_{x_k} &= \sum_{i=1}^n \int_G b_i u_{x_i} (u_{x_k x_k} \eta^2 + 2u_{x_k} \eta \eta_{x_k}) \\ &\leq c \int_G (|\nabla u| |D^2 u| \eta^2 + |\nabla u|^2) \\ &\leq \varepsilon \int_G |D^2 u|^2 \eta^2 + c(\varepsilon) \int_G |\nabla u|^2 \end{aligned}$$

4. Term: Dies ist der erste Term auf der rechten Seite von (3.40). Er wird deshalb nach unten abgeschätzt.

$$\begin{aligned} \int_G f (u_{x_k} \eta^2)_{x_k} &= \int_G (f u_{x_k x_k} \eta^2 + f u_{x_k} 2\eta \eta_{x_k}) \\ &\geq -\|f\|_{L^2(G)} \left( \int_G |D^2 u|^2 \eta^2 \right)^{\frac{1}{2}} - c \|f\|_{L^2(G)} \left( \int_G |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq -\varepsilon \int_G |D^2 u|^2 \eta^2 - c(\varepsilon) \|f\|_{L^2(G)}^2 - c \|\nabla u\|_{L^2(G)}^2 \end{aligned}$$

5. Term: Dies ist der zweite Term auf der rechten Seite von (3.40). Dazu sei  $\underline{G} = (G_1, \dots, G_n)$  und  $\nabla \cdot \underline{G} = \sum_{i=1}^n G_{ix_i} \in L^2(G)$ . Die Konstanten hängen dann von der entsprechenden Norm ab.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_G G_i (u_{x_k} \eta^2)_{x_k x_i} &= - \sum_{i=1}^n \int_G G_{ix_i} (u_{x_k} \eta^2)_{x_k} \\ &\geq -\|\nabla \cdot \underline{G}\|_{L^2(G)} \left( \left( \int_G |D^2 u|^2 \eta^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_G |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\geq -\varepsilon \int_G |D^2 u|^2 \eta^2 - c(\varepsilon) \|\nabla \cdot \underline{G}\|_{L^2(G)}^2 - c \|\nabla u\|_{L^2(G)}^2. \end{aligned}$$

Den letzten Term auf der linken Seite von (3.40) schätze man für  $c \in L^\infty(G)$  selbst nach oben ab.

Damit erhalten wir insgesamt die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^n \int_G a_{ij} u_{x_i x_k} u_{x_j x_k} \eta^2 + 6\varepsilon \int_G |D^2 u|^2 \eta^2 + c(\varepsilon) \left( \int_G |\nabla u|^2 + \int_G u^2 \right) \\ \geq -c(\varepsilon) \|f\|_{L^2(G)}^2 - c \|\nabla u\|_{L^2(G)}^2 - c(\varepsilon) \|\nabla \cdot \underline{G}\|_{L^2(G)}^2 \end{aligned}$$

Wir verwenden jetzt die L-Bedingung mit  $\xi_0 = 0$ ,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq c_0 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

( $c_0 > 0$ ) und  $\xi_i = u_{x_i x_k}$  für  $i = 1, \dots, n$ . Dann folgt aus der Ungleichung

$$\sum_{i,j=1}^n \int_G a_{ij} u_{x_i x_k} u_{x_j x_k} \eta^2 - 6\varepsilon \int_G |D^2 u|^2 \eta^2 \leq c(\varepsilon) \left( \|f\|_{L^2(G)}^2 + \|\nabla \cdot \underline{G}\|_{L^2(G)}^2 + c \|u\|_{H^1(G)}^2 \right).$$

diese:

$$c_0 \sum_{i=1}^n \int_G u_{x_i x_k}^2 \eta^2 - 6\varepsilon \int_G |D^2 u|^2 \eta^2 \leq \left( \|f\|_{L^2(G)}^2 + \|\nabla \cdot \underline{G}\|_{L^2(G)}^2 + c \|u\|_{H^1(G)}^2 \right).$$

Summiere über  $k$  von 1 bis  $n$  und erhalte schließlich

$$(c_0 - 6n\varepsilon) \int_G |D^2 u|^2 \eta^2 \leq c(\varepsilon) \left( \|f\|_{L^2(G)}^2 + \|\nabla \cdot \underline{G}\|_{L^2(G)}^2 + c \|u\|_{H^1(G)}^2 \right).$$

Jetzt wählen wir  $\varepsilon = \frac{c_0}{12n}$  und erhalten

$$\int_G |D^2 u|^2 \eta^2 \leq c(\|u\|_{H^1(G)}^2 + \|f\|_{L^2(G)}^2 + \|\nabla \cdot G\|_{L^2(G)}^2). \quad (3.42)$$

Sei  $\overline{B_{2R}(x_0)} \subset G$ . Wähle eine Funktion  $\eta$  mit den Eigenschaften  $\eta = 1$  auf  $B_R(x_0)$ ,  $\eta = 0$  außerhalb  $B_{2R}(x_0)$ ,  $\eta \in C^1(G)$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$ , und  $|\nabla \eta| \leq c(R)$ . Dann erhält man

$$\begin{aligned} \int_{B_R(x_0)} |D^2 u|^2 &= \int_{B_R(x_0)} |D^2 u|^2 \eta^2 \leq \int_{B_{2R}(x_0)} |D^2 u|^2 \eta^2 \\ &= \int_G |D^2 u|^2 \eta^2 \leq c(\|u\|_{H^1(G)}^2 + \|f\|_{L^2(G)}^2 + \|\nabla \cdot G\|_{L^2(G)}^2). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Ist nun  $G' \subset\subset G$ , dann ist  $\{B_R(x) | x \in G'\}$  mit  $R < \frac{1}{2} \text{dist}(\overline{G'}, \partial G)$  eine offene Überdeckung der kompakten Menge  $\overline{G'}$ , also reichen endlich viele ( $N$  Stück) aus, und es folgt schließlich aus (3.43) die Ungleichung

$$\int_{G'} |D^2 u|^2 \leq \sum_{i=1}^N \int_{B_R(x_i)} |D^2 u|^2 \leq c(\|u\|_{H^1(G)}^2 + \|f\|^2 + \|\nabla \cdot G\|^2).$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

**Satz 3.27** Sei  $u$  schwache Lösung gemäß Satz 3.5, und es sei  $u \in H^2(G')$  für ein  $G' \subset\subset G$ . Es seien die dortigen Voraussetzungen erfüllt und zusätzlich  $a_{ij}, a_i \in H^{1,\infty}(G)$ ,  $\sum_{i=1}^n G_{ix_i} \in L^2(G)$ . Dann gibt es eine von den Normen von  $a_{ij}$ ,  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c$  und von  $\text{dist}(\overline{G'}, \partial G)$  und  $c_0$  abhängige Konstante  $C_A$ , so dass gilt:

$$\|u\|_{H^2(G')} \leq C_A (\|f\|_{L^2(G)} + \|\sum_{i=1}^n G_{ix_i}\|_{L^2(G)} + \sum_{i=1}^n \|G_i\|_{L^2(G)}). \quad (3.44)$$

Damit haben wir eine für uns wichtige A-Priori-Abschätzung bewiesen. Dies kann man auf den allgemeinen Fall  $u \in H^{s+1}(G)$  erweitern - unter den richtigen Voraussetzungen an die Koeffizienten und an den Rand des Gebietes. Dies geschieht im nächsten Semester.