Abteilung für Angewandte Mathematik 7.1.2008
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen I
WS 2007/8 — Woche 10

Abgabe: Montag, den 14. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **20 Punkte**

Interpolation nicht-glatter Funktionen
Sei $G := (0,1) \subset \mathbb{R}$ und sei $N \in \mathbb{N}$. Definiere $x_j := j/N$ für $j = 0, \dots, N$ und $h := 1/N$. Seien $I_j := (x_{j-1}, x_j)$ für $j \in \{1, \dots, N\}$. Sei X_h der Raum der stückweise linearen, stetigen Funktionen auf G bezüglich der Intervalle I_j, d.h. $X_h := \{v \in C(\overline{G}) : v|_{I_j} \in \mathbb{P}_1(I_j) \text{ für } j = 1, \dots, N\}$. Seien $\varphi_0, \dots, \varphi_N$ die zu den Punkten $x_0, \dots, x_N$ gehörigen Lagrangefunktionen aus X_h, d.h. $\varphi_j(x_k) = \delta_{j,k}$ für $j, k \in \{0, \dots, N\}$. Unser Ziel ist es, für jedes $u \in L^1(G)$ einen Interpolanden $\Pi_h u \in X_h$ zu definieren. Wir definieren $I_0 := (x_0, x_1)$, dann gilt $x_j \in I_j$ für jedes $j \in \{0, \dots, N\}$. Sei $X_h(I_j) := \{v|_{I_j} : v \in X_h\}$. Dann ist $(X_h(I_j), L^2(I_j))$ ein endlich dimensionaler Vektorraum mit Basis $\{\varphi_i|_{I_j} : i = 0, \dots, N, \varphi_i|_{I_j} \neq 0\}$. Diese Basis bezeichnen wir mit $(\varphi_{j,l})_{l=1,\dots,m_j}$ derart, dass $\varphi_{j,1} = \varphi_j|_{I_j}$. Dann existiert eine duale Basis $(\psi_{j,l})_{l=1,\dots,m_j}$ in $(X_h(I_j), L^2(I_j))$, d.h.

$$\int_{I_j} \varphi_{j,l}(x)\psi_{j,k}(x)\,dx = \delta_{l,k}$$

für alle $j = 0, \dots, N$ und $l, k \in \{1, \dots, m_j\}$. Für $u \in L^1(G)$ definieren wir nun $\Pi_h u \in L^1(G)$ durch

$$\Pi_h u(x) := \sum_{j=0,\dots,N} \varphi_j(x) \int_{I_j} \psi_{j,1}(y) u(y)\,dy.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\Pi_h : L^1(G) \to X_h$ wohldefiniert, linear und stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\Pi_h u_h = u_h$ für alle $u_h \in X_h$.

(c) Für $j \in \{0, \dots, N\}$ sei $S_j := I_{j-1} \cup I_j \cup I_{j+1}$, wobei $I_{-1} := I_{N+1} := \emptyset$. Zeigen Sie, dass alle $u \in L^1(G)$ und $j \in \{1, \dots, N\}$ gilt

$$\int_{I_j} |\Pi_h u|\,dx + \int_{I_j} h\,|(\Pi_h u)'|\,dx \leq c \int_{S_j} |u|\,dx,$$

wobei c unabhängig von u und j ist.

(d) Sei $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie, dass für alle $u \in L^p(G)$ gilt

$$\|\Pi_h u\|_{L^p(G)} \leq c(p)\,\|u\|_{L^p(G)}.$$

(e) Sei $1 \leq p < \infty$ und $k \in \{0, 1\}$. Zeigen Sie, dass für alle $u \in W^{k,p}(G)$ gilt

$$\|\Pi_h u - u\|_{W^{k,p}(G)} \leq c(k,p) \inf_{w_h \in X_h} \|u - w_h\|_{W^{k,p}(G)}.$$

(f) Sei $1 \leq p < \infty$ und $k \in \{0, 1\}$. Zeigen Sie, dass für alle $u \in W^{k,p}(G)$ gilt

$$\|\Pi_h u - u\|_{L^p(G)} \leq c(k,p)\, h^k \|u\|_{W^{k,p}(G)}.$$