Abteilung für Angewandte Mathematik 14.1.2008
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen I
WS 2007/8 — Woche 11

Abgabe: Montag, den 21. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Seien X, Y, und Z Banachräume und sei $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussage äquivalent sind.

(a) T ist stetig.

(b) T is stetig in einem beliebigen Punkt $x_0 \in X$.

(c) T ist beschränkt, d.h. $\sup_{x \in X : \|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y < \infty$.

(d) Es gibt ein $A \geq 0$ so dass, für alle $x \in X$ gilt $\|Tx\|_Y \leq A \|x\|_X$.

Seien $S \in L(X, Y)$ und $U \in L(Y, Z)$. Zeigen Sie, dass $U \circ S \in L(X, Z)$ und $\|U \circ S\|_{L(X,Z)} \leq \|U\|_{L(Y,Z)} \|S\|_{L(X,Y)}$.

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Sei $\mathcal{T}$ ein zulässige Triangulierung eine beschränkten Gebietes $G \subset \mathbb{R}^n$ mit $\sigma(T) \leq c_0$ für alle $T \in \mathcal{T}$. Sei $X_h := \{u_h \in C(\overline{G}) : u_h \in \mathbb{P}_1(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T}\}$ und sei $h := \min_{T \in \mathcal{T}} h_T$. Zeigen Sie die *inverse Abschätzung*

$$\|u_h\|_{H^1(G)} \leq c\, h^{-1} \|u_h\|_{L^2(G)}$$

für alle $u_h \in X_h$. Zeigen Sie, dass eine analoge Abschätzung nicht für alle $u \in H^1(G)$ gelten kann.

Aufgabe 3: **9 Punkte**

Sei G und X_h wie in Aufgabe 2. Weiterhin gebe es eine lineare, stetige Abbildung $\Pi_h : L^2(G) \to (X_h, \|\cdot\|_{L^2(G)})$ mit $\|u - \Pi_h u\|_{L^2(G)} \leq c\, h \|u\|_{H^1(G)}$ und $\|\Pi_h u\|_{H^1(G)} \leq \|u\|_{H^1(G)}$. (Für $n = 1$ wurde dies zum Teil auf dem letzten Zettel gezeigt.)

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $u \in L^2(G)$ genau ein $u_h \in X_h$ existiert mit

$$\int_G u_h(x) w_h(x)\, dx = \int_G u(x) w_h(x)\, dx$$

für alle $w_h \in X_h$. Diese Element wird im Folgenden mit $\Pi_2 u$ bezeichnet.

(b) Zeigen Sie, dass $\|u - \Pi_2 u\|_{L^2(G)} = \inf_{w_h \in X_h} \|u - w_h\|_{L^2(G)}$.

(c) Zeigen Sie, dass $\Pi_2 : L^2(G) \to (X_h, \|\cdot\|_{L^2(G)})$ eine lineare, stetige Abbildung ist, d.h. es gilt $\|\Pi_2 u\|_{L^2(G)} \leq c \|u\|_{L^2(G)}$ für alle $u \in L^2(G)$.

(d) Zeigen Sie, dass für alle $u \in H^1(G)$ gilt $\|u - \Pi_2 u\|_{L^2(G)} \leq c\, h \|u\|_{H^1(G)}$.

(e) Sei $\mathcal{T}$ nun eine gleichmäßige Triangulierung, d.h. $h(T) = h$ für alle $T \in \mathcal{T}$. Zeigen Sie, dass für alle $u \in H^1(G)$ gilt $\|\Pi_2 u\|_{H^1(G)} \leq c \|u\|_{H^1(G)}$. Tipp: (d) und Aufgabe 2.