Abteilung für Angewandte Mathematik 21.1.2008
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

**Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen I**
WS 2007/8 — Woche 12

**Abgabe: Montag, den 28. Januar, vor der Vorlesung**

**Aufgabe 1: 4 Punkte**

Sei $G = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass für alle $u \in C^3(\overline{G})$ mit $u = 0$ auf $\partial G$ gilt:

$$\|u\|_{H^2(G)} \leq 2\,\|\Delta u\|_{L^2(G)}.$$

**Aufgabe 2: 8 Punkte**

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ eine offenes, beschränktes Gebiet mit $C^1$-Rand.

(a) Es sei $\mathbf{u} \in C^2(\overline{G},\mathbb{R}^n) \cap H_0^1(G,\mathbb{R}^n)$ und $p \in C^1(\overline{G})$ eine Lösung der Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \qquad && \text{in } G, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{in } G \end{aligned} \tag{1}$$

zu gegebener rechter Seite $\mathbf{f} \in C^0(\overline{G},\mathbb{R}^n)$ mit $\Delta\mathbf{u} = (\Delta u_1, \dots, \Delta u_n)^T$ und $\operatorname{div}\mathbf{u} = \partial_1 u_1 + \dots + \partial_n u_n$. Ferner sei

$$X := \{\mathbf{w} \in H_0^1(G,\mathbb{R}^n) \,:\, \operatorname{div}\mathbf{w} = 0 \text{ fast überall in } G\}.$$

Zeigen Sie: $\mathbf{u}$ ist schwache Lösung von (1), d. h. $\mathbf{u} \in X$ erfüllt

$$\sum_{i=1}^n \int_G \nabla u_i \nabla \varphi_i \, dx = \sum_{i=1}^n \int_G f_i \varphi_i \qquad \text{für alle } \varphi \in X. \tag{2}$$

(b) Zeigen Sie: $X$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $H_0^1(G,\mathbb{R}^n)$.

(c) Zeigen Sie: Zu jedem $\mathbf{f} \in L^2(G,\mathbb{R}^n)$ existert eine eindeutige schwache Lösung $\mathbf{u} \in X$ von (2).

**Aufgabe 3: 8 Punkte**

Sei $A$ ein nichtleerer, abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraums $H$. Mit $A^\perp$ bezeichnen wir das *orthogonale Komplement von* $A$, d.h. $A^\perp := \{x \in H \,:\, x \perp A\}$. Dabei heisst $x \perp A$, dass $(x,y) = 0$ für alle $y \in A$.

(a) Zeigen Sie, dass $A^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von $H$ ist.

(b) Wir definieren die *orthogonale Projektion* $P : H \to A$ durch die Bedingung $(Px, y) = (x, y)$ für alle $y \in A$, also $x - Px \perp A$. Zeigen Sie, dass $P$ existiert und eindeutig bestimmt ist.

(c) Zeigen Sie, dass $P$ linear und stetig ist. Für $A \neq \{0\}$ gilt $\|P\|_{H \to H} = 1$.

(d) Zeigen Sie, dass es zu jedem $x \in H$ genau eine Darstellung $x = y + z$ mit $y \in A$ und $z \in A^\perp$ gibt.

(e) Zeigen Sie: $(A^\perp)^\perp = A$.