Abteilung für Angewandte Mathematik 28.1.2008
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen I
WS 2007/8 — Woche 13

Abgabe: Montag, den 4. Februar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Wie in der Vorlesung sei $\Delta_k^h f(x) = \frac{1}{h}(f(x+he_k) - f(x))$. Seien $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_k^h f)(x) g(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\Delta_k^{-h} g)(x)\, dx.$$

(b) Zeigen Sie, dass $\Delta_k^h(fg)(x) = f(x+he_k)\Delta_k^h g(x) + \Delta_k^h f(x)\, g(x)$.

(c) Zeigen Sie, dass $\Delta_k^h \partial_j f = \partial_j \Delta_k^h f$ für $j, k = 1, \dots, n$.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Sei H ein Hilbertraum mit Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie, dass $\|u\| = \sup_{\|v\|\le 1}(u, v)$.

Aufgabe 3: **7 Punkte**

Zeigen Sie, dass $\{(2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ein VONS (vollständiges Orthonormalsystem) von $L^2(-\pi, \pi)$ (komplexwertig) ist.

Aufgabe 4: **6 Punkte**

Es seien die Voraussetzungen des Satzes von Lax–Milgram aus der Vorlesung erfüllt mit $f \in X^*$. Außerdem sei die Bilinearform B symmetrisch, d.h. $B(x, y) = B(y, x)$ für alle $x, y \in X$. Zeigen Sie, dass die Probleme

$$\exists u \in X \,:\, E(u) = \inf_{v\in X} E(v), \quad E(v) := \frac{1}{2} B(v, v) - f(v)$$

und

$$\exists u \in X \,:\, \forall v \in X \,:\, B(u, v) = f(v)$$

äquivalent sind. Zeigen Sie, dass diese Aussage für nicht-symmetrische Bilinearformen im Allgemeinen falsch ist.