Abteilung für Angewandte Mathematik 28.10.2007
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen I

WS 2007/8 — Woche 2

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/npdgl_WS07/

Abgabe: Montag, den 5. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: 6 Punkte

(a) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C(G)$. Für alle $\varphi \in C_0^\infty(G)$ mit $\varphi \geq 0$ gelte
$$\int_G f(x)\varphi(x)\,dx \geq 0.$$
Zeigen Sie, dass $f \geq 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Folgerung aus (a) auch gilt, wenn man nur $f \in L^p(G)$ mit $1 < p < \infty$ voraussetzt.

Aufgabe 2: 7 Punkte

Sei μ ein Maß auf Y, $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \times Y \to \mathbb{R}$ mit $f(x,\cdot)$ integrierbar bzgl. μ für alle $x \in G$. Betrachte die Funktion
$$\varphi : G \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = \int_Y f(x,y)\,d\mu(y).$$

(a) Es sei $f(\cdot,y) \in C(\overline{G})$ stetig auf G für μ-fast-alle $y \in Y$, und es gebe eine μ-integrierbare Funktion $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $\sup_{x\in G} |f(x,y)| \leq g(y)$ für μ-fast-alle $y \in Y$. Zeigen Sie, dass φ stetig auf G ist.

(b) Es sei $f(\cdot,y) \in C^1(\overline{G})$ für μ-fast-alle $y \in Y$. Ferner gebe es eine μ-integrierbare Funktion $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $\sup_{x\in G} |D_x f(x,y)| \leq g(y)$ für μ-fast-alle $y \in Y$. Zeigen Sie, dass φ auf G stetig differenzierbar ist und dass für alle $x \in G$ gilt
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x) = \int_Y \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)\,d\mu(y).$$

Aufgabe 3: 7 Punkte

Es seien $0 < \alpha < 2$ und $G = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = (r\cos\varphi, r\sin\varphi), 0 < \varphi < \alpha\pi\}$ und
$$u(x) = r^{\frac{1}{\alpha}} \sin\frac{\varphi}{\alpha}.$$

(a) Zeigen Sie $u \in C^2(\overline{G}\setminus\{0\}) \cap C^0(\overline{G})$. Für welche α gilt $u \in C^k(\overline{G})$, $k = 1, 2$?

(b) Zeigen Sie, dass $\Delta u = 0$ auf G und $u = 0$ auf $\{x \in \partial G \,:\, |x| \neq 1\}$.