Abteilung für Angewandte Mathematik 5.11.2007
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

# Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen I

WS 2007/8 — Woche 3

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/npdgl_WS07/

**Abgabe: Montag, den 12. November, vor der Vorlesung**

**Aufgabe 1:** **10 Punkte**

Sei $G := (0,\pi) \times (0,\pi)$ und $\varphi \in C^1(\partial G)$. Gesucht wird eine Lösung $u \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ der Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{auf } G, \\ u &= \varphi \quad \text{auf } \partial G. \end{aligned}$$

(a) Sei $\varphi$ auf drei Kanten von $\partial G$ gleich Null. Konstruieren Sie mit Hilfe des Ansatzes $u(x,y) = f(x) \cdot g(y)$ zunächst spezielle Lösungen und anschließend die allgemeine Lösung.

(b) Sei nun $\varphi$ in den Ecken von $G$ gleich Null. Konstruieren Sie mit Hilfe von (a) eine Lösung.

(c) Sei nun $\varphi \in C(\partial G)$ beliebig. Konstruieren Sie mit Hilfe von $(b)$ eine Lösung. Tipp: Betrachten Sie $xy$.

**Aufgabe 2:** **5 Punkte**

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $C^1$-Rand. Sei $\mu \in L^1(\partial G, do)$. Definiere $v$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial G$ durch

$$v(x) := \int_{\partial G} \mu(\xi) \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} \, do(\xi).$$

Zeigen Sie, dass $v$ harmonisch auf jedem beschränkten Teilgebiet von $\mathbb{R}^n \setminus \partial G$ ist. Zeigen Sie, dass es $R, K > 0$ gibt so, dass

$$|v(x)| \leq K \, |x|^{2-n}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| \geq R$.

**Aufgabe 3:** **5 Punkte**

Sei $n \geq 3$, $R > 0$, $u \in C^2(B_R(0))$ und

$$v(y) := \left( \frac{R}{|y|} \right)^{n-2} u\left( \frac{R^2 y}{|y|^2} \right)$$

für alle $y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(0)}$. Zeigen Sie, dass aus $\Delta u = 0$ auf $B_R(0)$ folgt, dass $\Delta v = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(0)}$.