Abteilung für Angewandte Mathematik 5.11.2007
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen I

WS 2007/8 — Woche 4

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/npdgl_WS07/

Abgabe: Montag, den 19. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **7 Punkte**

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und sei u harmonisch auf G.

(a) Zeigen Sie, dass für alle Bälle $B = B_R(y) \subset G$ gilt

$$|\nabla u(y)| \leq \frac{n}{R} \sup_{\partial B} |u|.$$

Tipp: Mittelwertgleichungen.

(b) Sei $G' \subset\subset G$ und $d := \operatorname{dist}(G', \partial G)$. Zeigen Sie, dass für alle Multiindizes α gilt

$$\sup_{G'} |\nabla^\alpha u| \leq \left(\frac{n|\alpha|}{d}\right)^{|\alpha|} \sup_G |u|.$$

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Sei G ein beschränktes Gebiet, $f \in C(\overline{G})$ und $u \in C(\overline{G}) \cap C^2(G)$. Weiterhin sei $-\Delta u = f$. Zeigen Sie, dass

$$\sup_G |u| \leq \sup_{\partial G} |u| + C \sup_G |f|,$$

wobei C eine Konstante ist, die nur von $\operatorname{diam} G$ abhängt.

Aufgabe 3: **7 Punkte**

Sei G ein beschränktes Gebiet und $\alpha \in [0, n)$. Weiterhin sei $A \in L^\infty(G \times G)$. Für $x \in G$ und $f \in L^2(G)$ definieren wir

$$(Tf)(x) := \int_G \frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} f(y)\, dy$$

Zeigen Sie, dass T ein (wohldefinierter) stetiger, linearer Operator von $L^2(G)$ nach $L^2(G)$ ist. Zeigen Sie insbesondere, dass es ein $C > 0$ gibt mit

$$\|Tf\|_{L^2(G)} \leq C \, \|f\|_{L^2(G)}$$

für alle $f \in L^2(G)$.