Abteilung für Angewandte Mathematik 19.11.2007
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen I

WS 2007/8 — Woche 5

`http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/npdgl_WS07/`

Abgabe: Montag, den 26. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \geq 0$ und $\varepsilon > 0$ gilt

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{p} a^p + \frac{1}{q\,\varepsilon^{q/p}} b^q.$$

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei $G = B_{1/e}(0) \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x) := \log \big|\log |x|\big| \qquad \text{für } x \in G$$

in $H^{1,2}(G)$ aber nicht in $C^0(G)$ liegt.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Sei $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$ und

$$u(x, y) := \arctan \frac{y}{x}.$$

Für welche p liegt $u \in H^{1,p}(G)$.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Sei u auf $G \subset \mathbb{R}^n$ harmonisch und $u \geq 0$. Weiterhin sei $\overline{B_R(0)} \subset G$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1 - \frac{|x|}{R}}{\left(1 + \frac{|x|}{R}\right)^{n-1}}\, u(0) \leq u(x) \leq \frac{1 + \frac{|x|}{R}}{\left(1 - \frac{|x|}{R}\right)^{n-1}}\, u(0)$$

für alle $x \in B_R(0)$.
Diese Ungleichung wird auch manchmal Harnack'sche Ungleichung genannt.