Abteilung für Angewandte Mathematik 26.11.2007
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen I

WS 2007/8 — Woche 6

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/npdgl_WS07/

Abgabe: Montag, den 3. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **10 Punkte**

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $F(0) = 0$ und F' sei beschränkt. Sei weiter $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $1 \leq p < \infty$ und $u \in W_0^{1,p}(G)$.

(a) Zeigen Sie $v := F(u) \in W_0^{1,p}(G)$ und

$$\partial_i v = F'(u)\, \partial_i u, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

(b) Zeigen Sie, dass $|u|, u_+, u_- \in W_0^{1,p}(G)$, wobei $u_+(x) = \max\{u(x), 0\}$ und $u_- = \min\{u(x), 0)\}$ für $x \in G$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Es seien $p, q, r \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ (mit $\frac{1}{\infty} = 0$). Zeigen Sie, dass

$$* : L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R}) \to L^r(\mathbb{R}),\ (f, g) \mapsto f * g$$

wohldefiniert, bilinear und stetig ist und dass die **verallgemeinerte Young'sche Ungleichung**

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

gilt. Tipp: Wenden Sie für $1 < r < \infty$ die Hölder'sche Ungleichung an auf

$$|f(x-y)\, g(y)| = |f(x-y)|^{1-\frac{p}{r}} \left(|f(x-y)|^p \, |g(y)|^q\right)^{\frac{1}{r}} |g(y)|^{1-\frac{q}{r}}.$$

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Sei $1 \leq p < \infty$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Sei $f, g \in W^{1,p}(G) \cap L^\infty(G)$. Zeigen Sie, dass $fg \in W^{1,p}(G)$ und

$$\partial_i(fg) = (\partial_i f) g + f(\partial_i g)$$

für $i = 1, \ldots, n$.