Abteilung für Angewandte Mathematik 03.12.2007
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen I

WS 2007/8 — Woche 7

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/npdgl_WS07/

Abgabe: Montag, den 10. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Seien $f, g \in C_c^0(\mathbb{R})$ (stetig mit kompakten Träger). Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g).$$

Aufgabe 2: **10 Punkte**

Sei $1 \leq p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ und sei $\mathbb{H}$ der offene Halbraum in $\mathbb{R}^n$, d.h. $\mathbb{H} := \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 > 0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass sich jede Funktion $u \in W^{1,p}(\mathbb{H})$ mittels der Spiegelung

$$\bar{u}(x_1, x_2, \dots, x_n) := \eta(x_1)\Big(-3u(-x_1, x_2, \dots, x_n) + 4u\big(-\tfrac{x_1}{2}, x_2, \dots, x_n\big)\Big)$$

für $x_1 \leq 0$, wobei $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine geeignete Abschneidefunktion ist, zu einer Funktion $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen lässt.

(b) Zeigen Sie, dass $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $C_0^\infty(\overline{\mathbb{H}})$ dicht in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ist.

Aufgabe 3: **7 Punkte**

Sei X eine normierter Raum mit $X \neq \{0\}$ und Y ein Banachraum.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ gilt

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \in X : \|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x \in X : \|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{L}(X, Y)$ der linearen, stetigen Abbildungen von X nach Y versehen mit der Operatornorm ein Banachraum ist.