Abteilung für Angewandte Mathematik 10.12.2007
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen I

WS 2007/8 — Woche 8

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/npdgl_WS07/

Abgabe: Montag, den 17. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Sei T ein Simplex in $\mathbb{R}^n$ mit baryzentrischen Koordinaten $\lambda_0(x), \dots, \lambda_n(x)$. Zeigen Sie, dass für $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ gilt:

$$\int_T \lambda^\alpha(x)\,dx = \frac{\alpha! n!}{(|\alpha| + n)!}|T|.$$

Hierbei ist $\lambda^\alpha := \lambda_0^{\alpha_0} \cdots \lambda_n^{\alpha_n}$ und $\alpha! = \alpha_0! \cdots \alpha_n!$.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei T ein nicht degeneriertes Dreieck mit den Eckpunkten a_0, a_1, a_2 und $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ seien die linearen Polynome mit $\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 0, 1, 2$. Berechnen Sie die Elementsteifigkeitsmatrix

$$\left(\int_T \nabla\varphi_i \nabla\varphi_j\,dx\right)_{i,j=0,1,2}.$$

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in W_0^{1,2}(G)$ eine schwache Lösung von $-\Delta u \leq 0$, d.h.

$$\int_G \nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx \leq 0$$

für alle $\varphi \in W_0^{1,2}(G)$ mit $\varphi \geq 0$. Zeigen Sie, dass $u \leq 0$ fast überall in G.
Tipp: Benutzen Sie $\varphi = u^+ := u\,\chi_{\{u>0\}}$. Zeigen Sie, $\nabla u^+ = \nabla u\,\chi_{\{u>0\}}$.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Sei $T \subset \mathbb{R}^3$ ein nicht degeneriertes Tetraeder mit den Eckpunkten $a_0, \dots, a_3$ und den zugehörigen baryzentrischen Koordinaten $\lambda_0(x), \dots, \lambda_3(x)$. Ferner seien

$$a_{iij} := \frac{2a_i + a_j}{3} \qquad \text{für } i \neq j,$$
$$a_{ijk} := \frac{a_i + a_j + a_k}{3} \qquad \text{für } i < j < k.$$

Zeigen Sie, dass für alle $p \in \mathbb{P}_3(T)$:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{3} \frac{\lambda_i(3\lambda_i - 1)(3\lambda_i - 2)}{2} p(a_i) + \sum_{i \neq j} \frac{9\lambda_i\lambda_j(3\lambda_i - 1)}{2} p(a_{iij}) + \sum_{i<j<k} 27\lambda_i\lambda_j\lambda_k p(a_{ijk}).$$