Abteilung für Angewandte Mathematik 17.12.2007
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen I
WS 2007/8 — Woche 9

Abgabe: Montag, den 7. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **6 Punkte**

Sei $G \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt.

(a) Sei $f \in L^\infty(G)$. Zeigen Sie, dass $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

(b) Sei $f \in \bigcap_{1\le p<\infty} L^p(G)$. Weiterhin sei $\sup_{1\le p<\infty} \|f\|_p < \infty$. Zeigen Sie, dass $f \in L^\infty(G)$ ist.

(c) Konstruieren Sie eine Funktion $\bigcap_{1\le p<\infty} L^p(0,1)$ derart, dass $f \notin L^\infty(0,1)$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Sei $1 \le p < n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Angenommen es gelte für alle $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Abschätzung $\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le c\,\|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Zeigen Sie, dass dann schon $\frac{n}{q} = \frac{n}{p} - 1$ gelten muss. Tipp: Betrachten Sie $f_\lambda(x) := f(\lambda\, x)$.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Für einen Ball $B \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $3B$ den Ball mit gleichem Zentrum und dreifachem Radius. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ ein Ball und $u \in C(\overline{3B})$ derart, dass für alle Bälle $B_2 \subset 3B$ gilt:

$$\fint_{B_2} |u(x) - \langle u\rangle_{B_2}|\, dy \le c_2\, |B_2|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}$$

mit eine Konstanten $c_2 > 0$, wobei $\langle u\rangle_{B_2}$ denn Mittelwert von u auf B_2 bezeichnet. Dann existiert eine Konstante $c_3 > 0$, die nur von n und p abhängt, derart, dass für alle $x, z \in B$ gilt:

$$|u(x) - u(z)| \le c_3\, c_2\, |x - z|^{1-\frac{n}{p}}.$$

Tipp: Sei $a_j := \langle u\rangle_{B_{2^{-j}r}(x)}$. Betrachten Sie $\lim_{j\to\infty} a_j$ und $\sum_{j=j_0}^{\infty} (a_{j+1} - a_j)$.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, derart dass für jeden Ball $B \subset \mathbb{R}^n$ und jedes Polynom $p \in \mathbb{P}_m(B)$ gilt

$$\frac{1}{C}\|p\|_{L^\infty(B)} \le \frac{1}{|B|}\|p\|_{L^1(B)} \le C\|p\|_{L^\infty(B)}.$$