Abteilung für Angewandte Mathematik 26.06.2006
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Partielle Differentialgleichungen

SS 2006 — Woche 10

Abgabe: Montag, den 10. Juli, vor der Vorlesung

Notation: Für $f \in L^1(B)$ mit einem Ball $B \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$\langle f \rangle_B := \fint_B f(y)\,dy := \frac{1}{|B|} \int_B f(y)\,dy.$$

Dies ist das sogenannte *Mittelwertintegral*.

Aufgabe 1: **10 Punkte**

(a) Sei $B(x) \subset \mathbb{R}^n$ ein Ball (mit Zentrum x) und $u \in C^1(\overline{B(x)})$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c_1 > 0$ gibt, die nur von n abhängt, so dass

$$\fint_{B(x)} |u(y) - u(x)|\,dy \leq c_1 \int_{B(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy.$$

Tipp: Zeigen Sie $|u(x + s\,\omega) - u(x)| \leq \int_0^s |\nabla u(x + t\,\omega)|\,dt$ mit $|\omega| = 1$ und $s > 0$.

(b) Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ ein Ball und $u \in L^1(B)$. Zeigen Sie, dass

$$\inf_{a\in\mathbb{R}} \fint_B |u(y) - a|\,dy \leq \fint_B |u(y) - \langle u \rangle_B|\,dy \leq 2 \inf_{a\in\mathbb{R}} \fint_B |u(y) - a|\,dy.$$

(c) Sei $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ ein Ball mit Radius $r > 0$ und Zentrum x. Sei $p > n$ und $u \in C^1(\overline{B_r(x)})$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c_2 > 0$ gibt, die nur von p und n abhängt mit

$$\fint_{B_r(x)} |u(y) - \langle u \rangle_{B_r(x)}|\,dy \leq 2 \fint_{B_r(x)} |u(y) - u(x)|\,dy \leq c_2\, r^{1-\frac{n}{p}}\, \|\nabla u\|_{L^p(B_r(x))}.$$

Aufgabe 2: **10 Punkte**

Sei $\Omega := (0,\pi) \times (0,\pi)$ und sei $\varphi \in C(\partial\Omega)$ gegeben durch

$$\varphi(x,y) := x^2\, y^2$$

für all $(x,y) \in \partial\Omega$. Bestimmen Sie mit Hilfe von Aufgabe 2, Woche 9, eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ der Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{auf } \Omega,\\ u &= \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$