Abteilung für Angewandte Mathematik 10.07.2006
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Partielle Differentialgleichungen

SS 2006 — Woche 11

Abgabe: Montag, den 17. Juli, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **10 Punkte**

Notation: Für einen Ball $B \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $2B$ den Ball mit gleichem Zentrum und doppeltem Radius.

(a) Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ ein Ball, $u \in C^1(\overline{2B})$ und $p > n$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c_1 > 0$ gibt, welche nur von n und p abhängt, derart, dass für alle $x, z \in B$ gilt:

$$|u(x) - u(z)|\, dy \leq c_1 \, |x - z|^{1-\frac{n}{p}} \, \|\nabla u\|_{L^p(2B)}.$$

Tipp: Aufgabe 1, Woche 10, insbesondere Teil (c), letzte Abschätzung. Wählen Sie geeignete um x und z zentrierte Bälle.

(b) Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ ein Ball und $u \in C(\overline{2B})$ derart, dass für alle Bälle $B_2 \subset 2B$ gilt:

$$\fint_{B_2} |u(x) - \langle u \rangle_{B_2}|\, dy \leq c_2 \, |B_2|^{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}}$$

mit eine Konstanten $c_2 > 0$. Dann existiert eine Konstante $c_3 > 0$, die nur von n und p abhängt, derart, dass für alle $x, z \in B$ gilt:

$$|u(x) - u(z)|\, dy \leq c_3 \, c_2 \, |x - z|^{1-\frac{n}{p}}.$$

Tipp: Sei $a_j := \langle u \rangle_{B_{2^{-j}r}(x)}$. Betrachten Sie $\lim_{j\to\infty} a_j$ und $\sum_{j=j_0}^{\infty} (a_{j+1} - a_j)$.

Hinweis: Der Beweis von (a) ist einfacher als von (b). Natürlich kann man auch erst die stärkere Aussage (b) beweisen und dann (a) darauf zurückführen. Auf jeden Fall sollte man nochmals Aufgabe 1, Woche 10 anschauen.

Aufgabe 2: **10 Punkte**

Sei $\Omega := (0, \pi)$, $T > 0$ und $Q := (0, T) \times \Omega$. In Aufgabe 1, Woche 7, wurde gezeigt, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) &= 0 && \text{für alle } x \in \Omega, t > 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) &= 0 && \text{für alle } t \geq 0, \\ u(0,x) &= u_0(x) && \text{für alle } x \in \Omega, \end{aligned}$$

für $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$ eine Lösung $u \in C(\overline{Q}) \cap C^2(Q)$ hat. Zeigen Sie nun, die gleiche Aussage unter der Voraussetzung $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ mit $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$.

Tipp: Benutzen Sie die Theorie für $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ und das Maximumsprinzip für parabolische Gleichungen.