Abteilung für Angewandte Mathematik 10.07.2006
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Partielle Differentialgleichungen

SS 2006 — Woche 12

Abgabe: Montag, den 24. Juli, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: 10 Punkte

(a) Sei $f, g, h \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren $\overline{f} \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ durch $\overline{f}(x) := f(-x)$. Zeigen Sie, dass $\langle f * g, h\rangle = \langle g, \overline{f} * h\rangle$. (Zur Erinnerung: $\langle a, b\rangle = \int a(x)\, b(x)\, dx$.)

(b) Für $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ und $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ zu definieren wir $f * u : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ durch

$$(f * u)(\varphi) := u(\overline{f} * \varphi).$$

Zeigen Sie, dass $f*u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ gilt. Zeigen Sie weiterhin, dass diese Definition der Faltung mit der urspünglichen Definition der Faltung übereinstimmt, d.h. zeigen Sie, dass für alle $g \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ und $u = T_g$ gilt: $f * T_g = T_{f*g}$.

(c) Sei $n \geq 3$ und $v(x) := \frac{1}{\kappa_n} \frac{1}{|n-2|} |x|^{2-n}$. Nach Vorlesung gilt $-\Delta v = \delta_0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Sei nun $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass

$$-\Delta(v * f) = f \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

gilt, wobei $v * f$ im Distributionssinne, d.h. wie in (b), zu verstehen ist.

Aufgabe 2: 10 Punkte

(a) Sei $I := (-1, 1)$, $2I := (-2, 2)$ und $f \in C^1(\overline{I}) \cap W^{1,2}(I)$. Zeigen Sie, dass es eine Funktion $\tilde{f} \in C_0^1(\overline{2I}) \cap W_0^{1,2}(2I)$ gibt mit $f(x) = \tilde{f}(x)$ für alle $x \in I$ und

$$\|\tilde{f}\|_{W_0^{1,2}(2I)} \leq c_1 \|f\|_{W^{1,2}(I)}$$

mit einer von f unabhängigen Konstante $c_1 > 0$. Man nennt $\tilde{f}$ *Fortsetzung* von f und die Abbildung $\mathcal{E} : f \mapsto \tilde{f}$ nennt man *Fortsetzungsoperator*.

Tipp: Setzen Sie f mittels Spiegelung an den Punkten 1 und -1 fort und multiplizieren Sie mit einer Abschneidefunktion.

(b) Verallgemeinern Sie die Aussage von (a) auf Bälle $B \subset \mathbb{R}^n$, d.h. konstruieren Sie einen Fortsetzungsoperator $\mathcal{E} : f \mapsto \tilde{f}$ von $C^1(\overline{B}) \cap W^{1,2}(B)$ nach $C_0^1(\overline{2B}) \cap W_0^{1,2}(2B)$ mit

$$\|\tilde{f}\|_{W_0^{1,2}(2B)} \leq c_2 \|f\|_{W^{1,2}(B)}$$

mit $c_2 > 0$ unabhängig von f. Hierbei ist $2B$ der Ball mit doppeltem Radius und gleichem Zentrum wie B.