Abteilung für Angewandte Mathematik 08.05.2006
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Partielle Differentialgleichungen

SS 2006 — Woche 3

Abgabe: Montag, den 15. Mai, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **10 Punkte**

(a) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{1}$$

Mittels der Substitution $\xi := x + t$, $\eta := x - t$ definieren wir

$$\overline{u}(\xi, \eta) := u(x, t).$$

Bestimmen Sie

$$\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \xi \, \partial \eta}.$$

Folgern Sie hieraus, dass die Lösung u die Gestalt $u(x,t) = g(x-t) + h(x+t)$ hat mit geeigneten Funktionen $g, h \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

(b) Zeigen Sie umgekehrt, dass für alle $g, h \in C^2(\mathbb{R}^2)$ die Funktion $u(x,t) := g(x-t) + h(x+t)$ die Differentialgleichung (1) erfüllt.

(c) Seien $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$. Konstruieren Sie eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ von (1) welche

$$u(x,0) = \varphi(x),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt.