Abteilung für Angewandte Mathematik 15.05.2006
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Partielle Differentialgleichungen

SS 2006 — Woche 4

Abgabe: Montag, den 22. Mai, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit glattem Rand und sei $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass $u \in C^1(\Omega)$ Lösung der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = 0$$

ist genau dann, wenn u konstant ist auf den Lösungen des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems $\boldsymbol{\varphi}' = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi})$.

Aufgabe 2: **8 Punkte**

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t(t,x) + x \cdot \nabla u(t,x) &= 0 && \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) &= u_0(x) && \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $u_0 \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$ vorgegeben sei. (Hierbei ist $C_b^1(\mathbb{R}^n)$ der Raum der einmal stetig differenzierbaren Funktionen g derart, dass $|g|$ und $|\nabla g|$ beschränkt ist.)

(a) Zunächst sei u eine stetig differenzierbare Lösung von (1). Bestimmen Sie das gewöhnliche Differentialgleichungssystem, entlang deren Lösungskurven u konstant sein müssen.

(b) Berechnen Sie die Lösungskurven $y_z(t)$ des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems aus (a) mit Anfangsbedingung $y_z(0) = z$.

(c) Berechnen Sie eine Formel für die Lösung des Anfangswertproblems in Abhängigkeit vom Anfangswert u_0.

Aufgabe 3: **8 Punkte**

Für die folgenden Cauchy-Probleme sei $\Omega := \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 : t > 0\}$, so dass die Anfangswerte jeweils auf der Hyperfläche $\partial\Omega = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3\}$ gegeben sind. Seien φ_0 bzw. φ_1 die Anfangswerte von u bzw. u_t auf $\partial\Omega$. Untersuchen Sie, ob die folgenden Cauchyprobleme wohlgestellt sind, d.h. die Randdaten zulässig für das Cauchyproblem sind.

(a) $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$ mit $\varphi_0(x,y) = x + y$ und $\varphi_1(x,y) = 1$.

(b) $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$ mit $\varphi_0(x,y) = x^2 + y$ und $\varphi_1(x,y) = 0$.

(c) $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_t u = 0$ mit $\varphi_0(x,y) = x + y$ und $\varphi_1(x,y) = 1$.

(d) $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_t^2 u = 0$ mit $\varphi_0(x,y) = x + y$ und $\varphi_1(x,y) = 1$.