Partielle Differentialgleichungen

SS 2006 — Woche 5

Abgabe: Montag, den 29. Mai, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **13 Punkte**

Seien $\alpha < \beta$ reelle Zahlen. Sei $\mu \in C^1([\alpha,\beta])$ mit $\mu'(\xi) < 0$ für alle $\xi \in [\alpha,\beta]$. Sei

$$\Omega := \big\{(\xi,\eta) \,:\, \xi \in [\alpha,\beta], \eta \in (\mu(\xi),\mu(\alpha))\big\}$$

Weiterhin seien $a, b \in C^1(\overline{\Omega})$, $c, F \in C(\overline{\Omega})$, $\varphi_0 \in C^1([\alpha,\beta])$ und $\varphi_1 \in C([\alpha,\beta])$ gegeben.
Zeigen Sie, dass es genau eine Lösung $u \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} \in C(\overline{\Omega})$ des folgenden Cauchyproblems gibt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + a\,\frac{\partial u}{\partial \xi} + b\,\frac{\partial u}{\partial\eta} + c\,u = F \qquad \text{in } \Omega$$

mit den Randwerten

$$\begin{aligned} u(\xi,\mu(\xi)) &= \varphi_0(\xi), \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\xi,\mu(\xi)) &= \varphi_1(\xi) \end{aligned}$$

für alle $\xi \in [\alpha,\beta]$. (Hierbei steht $\frac{\partial}{\partial n}$ für die Normalenableitung.)

Aufgabe 2: **7 Punkte**

Sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ Lösung des Anfangswertproblems für die Wellengleichung in einer Dimension:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u &= g && \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= h && \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{aligned}$$

Hierbei haben g, h kompakten Träger. Sei

$$k(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 dx, \qquad\qquad p(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|^2 dx.$$

Dann nennt man $k(t)$ die *kinetische Energie* und $p(t)$ die *potentielle Energie*. Zeigen Sie, dass $k(t) + p(t)$ konstant bzgl. t ist.