Partielle Differentialgleichungen

SS 2006 — Woche 6

Abgabe: Montag, den 12. Juni, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **6 Punkte**

[**Eindeutigkeit**] Sei $f \in C(\overline{Q})$ und $g \in C(\Gamma)$. Zeigen Sie mit Hilfe der Energiemethode, dass es höchstens eine Lösung $u \in C^2(\overline{Q})$ der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f \qquad \text{in } Q \\ u &= g \qquad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

gibt. Tipp: Betrachten Sie $e'(t)$ mit $e(t) := \int_\Omega \left|u(t,x)\right|^2 dx$.

Aufgabe 2: **8 Punkte**

[**Eindeutigkeit des Rückwärtsproblems**] Seien $u, \tilde{u} \in C^2(\overline{Q})$ Lösungen von

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f \qquad \text{in } Q \\ u &= g \qquad \text{auf } \partial\Omega \times [0,T] \end{aligned}$$

mit $g \in C(\partial\Omega \times [0,T])$. Weiterhin sei $u(x,T) = \tilde{u}(x,T)$ für alle $x \in \Omega$, d.h. die Temperaturen stimmen zum Zeitpunkt T überein. Zeigen Sie, dass $u = \tilde{u}$ auf Q gilt, d.h. u und $\tilde{u}$ müssen zu allen früheren Zeiten ebenfalls übereinstimmen.

Tipp: Betrachten Sie $e(t)$, $e'(t)$ und $e''(t)$ mit $e(t) := \int_\Omega \left|u(t,x)\right|^2 dx$. Zeigen Sie $(e'(t))^2 \leq e(t)\, e''(t)$. Finden Sie mittels Gegenannahme t_1, t_2 mit $e(t) > 0$ auf (t_1, t_2) und $e(t_2) = 0$. Zeigen Sie, dass $f(t) := \ln e(t)$ auf (t_1, t_2) konvex ist. Leiten Sie hieraus mittels e einen Widerspruch her.

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Sei u eine glatte Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

(a) Zeigen Sie, dass $u_\lambda(x,t) := u(\lambda\, x, \lambda^2\, t)$ ebenfalls eine Lösung ist.

(b) Zeigen Sie mittels (a), dass $v(x,t) := x \cdot Du(x,t) + 2\,t\,u_t(x,t)$ ebenfalls eine Lösung ist.