Partielle Differentialgleichungen

SS 2006 — Woche 7

Abgabe: Montag, den 19. Juni, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **15 Punkte**

Sei $\Omega := (0, \pi)$. Gesucht wird eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) &= 0 && \text{für alle } x \in \Omega, t > 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) &= 0 && \text{für alle } t \geq 0, \\ u(0,x) &= u_0(x) && \text{für alle } x \in \Omega, \end{aligned}$$

wobei $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ ist mit $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$.

(a) Benutzen Sie den Ansatz $u(t,x) = v(t)\, w(x)$, um für spezielle u_0 eine Lösungsformel herzuleiten.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass es auch für allgemeines $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$ eine Lösung gibt. Tipp: Fourierreihe.

(c) Zeigen Sie, dass für die Lösung u aus (b) gilt: $\lim_{t \to 0^+} \|u(t,\cdot) - u_0\|_\infty = 0$.

(d) Sei nun u_0 nur aus $L^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass der Ansatz aus (b) ebenfalls eine Lösung liefert und $\lim_{t \to 0^+} \|u(t,\cdot) - u_0\|_2 = 0$ gilt.