Abteilung für Angewandte Mathematik 19.06.2006
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Partielle Differentialgleichungen

SS 2006 — Woche 8

Abgabe: Montag, den 26. Juni, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **6 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränktes Gebiet. Sei $\alpha \in (0,n)$, $p \in (1, \frac{n}{\alpha})$ und $q \in (1,\infty)$ mit

$$\frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} < \frac{1}{q}.$$

Für $f \in L^q(\Omega)$ sei $I_\alpha f$ definiert durch

$$(I_\alpha f)(x) := \int_\Omega \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy$$

für $x \in \Omega$. Zeigen Sie, dass I_α ein stetiger Operator von $L^p(\Omega)$ nach $L^q(\Omega)$ ist.

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Sei $\Omega = (0,\pi)$ und $u_0 \in L^2(\Omega)$ sei gegeben durch

$$u_0(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (0,\pi/2), \\ 0 & \text{für } x \in (\pi/2,\pi). \end{cases}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe von Aufgabe 1 aus Woche 7 eine Lösung u des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) &= 0 && \text{für alle } x \in \Omega, t > 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) &= 0 && \text{für alle } t \geq 0, \\ u(0,x) &= u_0(x) && \text{für alle } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: **8 Punkte**

Sei $\Omega = (0,\pi)$. Es seien $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ Folgen reeller Zahlen mit $\sum_{n=1}^\infty n^2\,|a_n| < \infty$ und $\sum_{n=1}^\infty n\,|b_n| < \infty$. Wir definieren nun $g(x) := \sum_{n=1}^\infty a_n \sin(nx)$ und $h(x) := \sum_{n=1}^\infty b_n \sin(nx)$ für alle $x \in [0,\pi]$ und betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) &= 0 && \text{für alle } x \in \Omega, t > 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) &= 0 && \text{für alle } t \geq 0, \\ u(0,x) &= g(x) && \text{für alle } x \in \Omega, \\ u_t(0,x) &= h(x) && \text{für alle } x \in \Omega. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie $g \in C^2([0,\pi])$ und $h \in C^1([0,\pi])$.

(b) Für die Lösung machen wir den Ansatz $u(t,x) = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n(t)\,\sin(n\,x)$. Bestimmen Sie die Differentialgleichung, die die α_n erfüllen müssen.

(c) Lösen Sie die gewöhnlichen Differentialgleichungen aus (b). Zeigen Sie, dass mit den so erhaltenen Funktionen α_n gilt: $u \in C^2([0,\infty) \times (0,\pi))$ und u löst das Anfangswertproblem.