Abteilung für Angewandte Mathematik 26.06.2006
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Partielle Differentialgleichungen

SS 2006 — Woche 9

Abgabe: Montag, den 3. Juli, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Sei $1 \leq p < n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Angenommen es gelte für alle $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Abschätzung

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq c\,\|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Zeigen Sie, dass dann schon $\frac{n}{q} = \frac{n}{p} - 1$ gelten muss.
Tipp: Betrachten Sie $f_\lambda(x) := f(\lambda\, x)$.

Aufgabe 2: **8 Punkte**

Sei $\Omega := (0,\pi) \times (0,\pi)$ und $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Gesucht wird eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ der Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{auf } \Omega, \\ u &= \varphi \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

(a) Sei φ auf drei Kanten von $\partial\Omega$ gleich Null. Konstruieren Sie mit Hilfe des Ansatzes $u(x,y) = f(x)\cdot g(y)$ zunächst spezielle Lösungen und anschließend die allgemeiner Lösung.

(b) Sei nun φ in den Ecken von Ω gleich Null. Konstruieren Sie mit Hilfe von (a) eine Lösung.

(c) Sei nun $\varphi \in C(\partial\Omega)$ beliebig. Konstruieren Sie mit Hilfe von (b) eine Lösung. Tipp: Betrachten Sie xy.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Sei X eine normierter Raum und Y ein Banachraum. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{L}(X,Y)$ der linearen, stetigen Abbildungen von X nach Y versehen mit der Operatornorm ein Banachraum ist.

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f_k, f \in L^2(\Omega)$. Die Folge f_k heißt *schwach konvergent gegen* f, falls für jedes $g \in L^2(\Omega)$ gilt $\lim_{k\to\infty} \langle f_k, g\rangle = \langle f, g\rangle$, wobei $\langle \cdot,\cdot\rangle$ das normale L^2-Skalarprodukt ist. Wir schreiben dann $f_k \rightharpoonup f$ in $L^2(\Omega)$.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Sei e_n ein Orthonormalsystem in $L^2(0,\pi)$. Zeigen Sie, dass $e_n \rightharpoonup 0$ in $L^2(0,\pi)$ gilt.