Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

29.04.2004

Singuläre Integrale

SS 2004 — Blatt 1

Abgabe: **Do, 06.05.2004**

Aufgabe 1

(a) Sei $f \in L^1_{\text{loc}}$ und G die Menge der Lebesguepunkte von f ist. Zeigen Sie, dass $|\mathbb{R}^d \setminus G| = 0$ ist. Tipp: Zeigen Sie, zunächst, dass

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y) - c|\, dy = |f(x) - c|.$$

für alle $c \in \mathbb{Q}$ und fast alle x gilt.

(b) Sei $\mathcal{F}$ eine reguläre Familie. Zeigen Sie, dass für alle Lebesguepunkte gilt

$$\fint_S |f(x-y) - f(x)|\, dy \to 0 \qquad \text{für } |S| \to 0,$$

$$\fint_S f(x-y)\, dy \to f(x) \qquad \text{für } |S| \to 0.$$

Aufgabe 2

Sei B der Einheitsball in $\mathbb{R}^d$ und $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp} f \subset B$ so, dass $|f| \ln(2+|f|)$ integrierbar ist. Zeigen Sie, dass $Mf \in L^1(B)$ ist. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie, dass

$$|\{Mf > \alpha\}| \leq \frac{2A}{\alpha} \int_{\{|f|>\alpha/2\}} |f|\, dx. \tag{1}$$

Tipp: Wenden Sie die schwache (1,1) Abschätzung auf $f\,\chi_{\{|f|>\alpha/2\}}$ an.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_B Mf\, dx \leq |B| \int_1^\infty \lambda(\alpha)\, d\alpha + \lambda(1). \tag{2}$$

mit $\lambda(\alpha) := |\{Mf > \lambda\}|$.

(c) Kombinieren Sie (1) und (2) und integrieren Sie über α.