Abteilung für Angewandte Mathematik 13.05.2004
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

Singuläre Integrale

SS 2004 — Blatt 3

Abgabe: **Do, 20.05.2004**

Aufgabe 1

Für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ und Tupel $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ definieren wir die Halbnormen

$$p_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^\alpha \, (D^\beta \varphi)(x) \right|.$$

Wir defininieren

$$\mathcal{S} := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \, : \, p_{\alpha,\beta}(f) < \infty \text{ für alle Tupel } \alpha, \beta \right\}$$

und versehen $\mathcal{S}$ mit der durch die Halbnormen induzierten Topologie, d.h. $\varphi_n \to \varphi$ in $\mathcal{S}$ genau dann, wenn $p_{\alpha,\beta}(f_n - f) \to 0$ für alle Tupel α, β. Da die Tupel abzählbar sind, definiert $d(f,g) := \sum_j 2^{-j} p_{\alpha_j,\beta_j}(f-g)/(1 + p_{\alpha_j,\beta_j}(f-g))$ eine Metrik mit genau dieser Topologie. Also ist $\mathcal{S}$ ein metrischer Vektorraum. Der Raum $\mathcal{S}'$, der sogenannten *Raum der temperierten Distributionen* ist dann definiert als der Dualraum von $\mathcal{S}$, d.h.

$$\mathcal{S}' := \left\{ L \, : \, \mathcal{S} \to \mathbb{R} \text{ ist linear und stetig} \right\}.$$

Sei nun $k \, : \, \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ein Kern mit $k(x) = \Omega(x)\, |x|^{-d}$, wobei $\Omega \in C^1(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ eine 0–homogene Funktion ist mit

$$\int_{|x|=1} \Omega(x) \, dx = 0.$$

Für $\varphi \in \mathcal{S}$ definieren wir

$$\langle k, \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} k(x) \, \varphi(x) \, dx.$$

Zeigen Sie, dass $\langle k, \varphi \rangle$ wohldefiniert ist und die Abbildung $\varphi \mapsto \langle k, \varphi \rangle$ eine temperierte Distribution definiert.