Abteilung für Angewandte Mathematik 17.06.2004
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

Singuläre Integrale

SS 2004 — Blatt 5

Abgabe: **Do, 24.06.2004**

Aufgabe 1

Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Für alle achsparallelen Würfel Q und all $x \in \mathbb{R}^d$ seien $M^\sharp_Q f$ und $(M^\sharp f)(x)$ definiert durch

$$M^\sharp_Q f := \fint_Q |f - \langle f \rangle_Q| \, dx, \qquad (M^\sharp f)(x) := \sup_{Q \ni x} M^\sharp_Q f.$$

Hierbei ist $\langle f \rangle_Q := \fint_Q f \, dx$.
Es soll gezeigt werden, dass für alle $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ und alle $1 \leq p < \infty$ gilt

$$\|f\|_p \leq A_p \|M^\sharp f\|_p \tag{1}$$

mit Konstanten $A_p \geq 1$. Als Zwischenschritt soll zunächst gezeigt werden, dass es ein $k > 1$ gibt, so dass für jedes $\beta > 0$ ein $\alpha > 0$ existiert mit

$$\big|\{x \in \mathbb{R}^d \,:\, (Mf)(x) > \lambda,\, (M^\sharp f)(x) \leq \alpha\lambda\}\big| \leq \beta \big|\{(Mf)(x) > K\lambda\}\big| \tag{2}$$

für alle $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.
Gesehen dabei wie folgt vor:

(a) Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ fest. Für $\lambda > 0$ sei $\mathcal{O}_\lambda := \{Mf > \lambda\}$. Zerlegen Sie $\mathcal{O}_\lambda$ in eine Familie Q_j disjunkter, dyadischer Würfel mit $\lambda < M_{Q_j} f \leq 2^d \lambda$. Zerlegen Sie analog $\mathcal{O}_{A\lambda}$ in eine Familie W_j disjunkter, dyadischer Würfel mit $\lambda < M_{W_j} f \leq A\, 2^d \lambda$. Zeigen Sie, dass für geeignetes $A > 1$ die Familie der Familie Q_j untergeordnet ist, d.h. für jedes W_j gibt es ein Q_k mit $W_j \subset Q_k$.

(b) Sei nun $E := \{x \in Q_0 \,:\, M^\sharp f \leq \alpha\lambda\}$. Unter der Annahme, dass E nicht leer ist, zeigen Sie, dass $M^\sharp_{Q_0} f \leq \alpha\, \lambda$ gilt und, dass

$$\sum_{k\,:\,W_k \subset Q_0} |W_k| \leq \frac{\alpha\, |Q_0|}{A} + \frac{2^d}{A} \sum_{k\,:\,W_k \subset Q_0} |W_k|$$

Folgern Sie hieraus, dass (2) gilt für $A \geq 2^{d+1}$.

(c) Zeigen Sie, dass aus (2) schon (1) folgt.