Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. M. Růžička
C. Gersbacher

22.11.2010

Praktikum zur Vorlesung

Einführung in die Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2010/11 — Blatt 4

Praktikumsaufgabe

Abgabe: Montag, den 29.11.2010, im Praktikum. Die Aufgaben können in Gruppen zu zweit bearbeitet werden.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Als das *Referenzdreieck* oder *Einheitssimplex* $\widehat{T} \subset \mathbb{R}^2$ bezeichnet man die konvexe Hülle der Einheitsvektoren e_1, e_2 vereinigt mit dem Ursprung $e_0 = 0$. Die Knoten von $\widehat{T}$ bezeichnen wir mit $\widehat{p}_i = e_i$, $i = 0, 1, 2$. Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ ein beliebiges nicht entartetes Dreieck mit Eckpunkten $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$. Die *Referenzabbildung* $F_T : T \to \widehat{T}$ ist eine affin lineare Funktion definiert durch $F_T(p_i) = \widehat{p}_i$, $i = 0, 1, 2$.

a) Geben Sie F_T konkret an und zeigen Sie, dass $|\det DF_T| = \frac{|T|}{|\widehat{T}|}$.

b) Sei $\widehat{\varphi}$ eine glatte Funktion von $\widehat{T}$ nach $\mathbb{R}$. Diese induziert eine Funktion auf T durch $\varphi(x) = \widehat{\varphi}(F_T^{-1}(x))$. Auf $\widehat{T}$ sei eine Quadraturformel gegeben der Form

$$\widehat{Q}(\widehat{\varphi}) := \sum_{i=1}^{q} \omega_i \widehat{\varphi}(\lambda_i),$$

welche exakt sei auf einem Funktionenraum $\widehat{V}$, d. h. für alle $\widehat{\varphi} \in \widehat{V}$ gilt $\widehat{Q}(\widehat{\varphi}) = \int_{\widehat{T}} \widehat{\varphi}(\lambda)\, d\lambda$. Konstruieren Sie eine Quadratur Q auf T, welche exakt ist für alle $\varphi = \widehat{\varphi} \circ F_T^{-1}$ mit $\widehat{\varphi} \in \widehat{V}$. Geben Sie die zugehörigen Gewichte und Stützstellen an.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Sei $\widehat{T} \subset \mathbb{R}^2$ das Referenzdreieck wie oben definiert. Die Menge der Polynome vom Grad kleiner gleich $r \in \mathbb{N}$ auf $\widehat{T}$ bezeichnen wir mit $P_r(\widehat{T})$. Sei $L = \{p_j \;:\; j = 1, \ldots, N\} \subset \widehat{T}$ eine Menge von Punkten im Referenzdreieck. Dieser werden Funktionen $\Phi(L) := \{\widehat{\varphi}_i \in P_r(\widehat{T}) \;:\; i = 1, \ldots, N\}$ mit

$$\widehat{\varphi}_i(p_j) = \delta_{ij} \quad \text{für } 1 \le i, j \le N$$

zugeordnet.

a) Geben Sie zu $L = \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$ die Funktionen $\Phi(L)$ in $P_1(\widehat{T})$ an und zeigen Sie, dass diese eine Basis von $P_1(\widehat{T})$ bilden.

b) Nun zeigen Sie dasselbe für $P_2(\widehat{T})$ und $L = \{(0,0), (1,0), (0,1), (\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$.

c) Gibt es auch Funktionen $\Phi(L) \subset P_2(\widehat{T})$ zu $L = \{(0.1, 0), (0.9, 0), (0, 0.1), (0, 0.9), (0.1, 0.9), (0.9, 0.1)\}$?