Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. M. Růžička
C. Gersbacher

13.12.2010

Praktikum zur Vorlesung

Einführung in die Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2010/11 — Blatt 7

Praktikumsaufgabe

Abgabe: bis Montag, den 10.01.2011, per Mail an den Assistenten

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ polygonal berandet und durch ein Gitter $\mathcal{T}_h$ zulässig trianguliert. Die im Gitter enhaltenen Entitätenmengen bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^0 &= \{x_1, x_2, \dots, x_{N_0}\} \quad (\textit{Knoten in } \mathcal{T}_h), \\ \mathcal{E}^1 &= \{e_1, e_2, \dots, e_{N_1}\} \quad (\textit{Kanten in } \mathcal{T}_h), \\ \mathcal{E}^2 &= \{T_1, T_2, \dots, T_{N_2}\} \quad (\textit{Dreieicke in } \mathcal{T}_h). \end{aligned}$$

Es seien Funktionen $\varphi_i \in H^1(\Omega)$, $i = 0, \dots, N_0$, definiert durch

$$\begin{aligned} \varphi_i|_T &\in P_1(T) \quad \text{für alle } T \in \mathcal{E}^2, \\ \varphi_i(x_j) &= \delta_{ij} \quad \text{für alle } x_j \in \mathcal{E}^0, j = 1, \dots, N_0. \end{aligned}$$

Den von ihnen aufgespannten Raum bezeichnen wir mit $X_h = \operatorname{span}(\varphi_1, \dots, \varphi_{N_0}) \subset H^1(\Omega)$. Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben. Der *Lagrange-Interpolationsoperator*

$$u \mapsto L_h(u) =: u_h \in X_h$$

ist definiert durch die Vorschrift

$$u_h(x) = u(x) \quad \text{für alle } x \in \mathcal{E}^0.$$

Implementieren Sie den Lagrange-Interpolationsoperator und berechnen Sie die Abweichung in der L^2-Norm

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x) - u_h(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{T \in \mathcal{E}^2} \int_T |u(x) - u_h(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Approximieren Sie die Integrale auf der rechten Seite dabei durch eine Quadraturfomel. Untersuchen Sie numerisch das Konvergenzverhalten des Interpolationsoperators, indem Sie sich den *EOC* (siehe Blatt 2) ausgeben lassen.

Die Übungsblätter finden Sie auf der Vorlesungshomepage unter

`http://aam.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/ubungen/theonum_pde_WS10/`