**Abteilung für**
**Angewandte Mathematik**

Prof. Dr. M. Růžička
C. Gersbacher

17.01.2011

Praktikum zur Vorlesung

# Einführung in die Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2010/11 — Blatt 9

## Praktikumsaufgabe

**Abgabe:** bis Montag, den 31.01.2011, per Mail an den Assistenten

**Aufgabe 10** (8 Punkte)

Lösen Sie numerisch das Poisson-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit Hilfe des erster Ordnung Finite-Elemente Verfahrens. Das Gebiet $\Omega$ sei durch ein Gitter $\mathcal{T}$ zulässig trianguliert. Mit $(\varphi_i)_{i=1,\dots,N}$ bezeichnen wir die Lagrange-Basisfunktionen erster Ordnung über $\mathcal{T}$. Von der gesuchten numerischen Lösung $u_h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i$ erwarten wir, dass die Randwerte $g$ angenommen werden: sei $x_j \in \partial\Omega$ ein Punkt aus dem numerischen Gitter, dann soll gelten $u_h(x_j) = u_j = g(x_j)$.

Stellen Sie als ersten Schritt die Steifigkeitsmatrix $A = (\int_\Omega \nabla\varphi_j \nabla\varphi_i)_{i,j=1,\dots,N}$ und die rechte Seite $b = (\int_\Omega f\varphi_i)_{i=1,\dots,N}$ auf. Beides soll in nur einem Gitterdurchlauf geschehen.

Der folgende zweite Schritt lässt sich ebenfalls in einem Durchlauf des Gitters erledigen. Seien $(x_{i_k})_{k=1,\dots,n} \subset \partial\Omega$ Gitterpunkte von $\mathcal{T}$. Setzen Sie $b^{(0)} = b$ und $A^{(0)} = A$. Seien

$$b_j^{(k+1)} = \begin{cases} b_j^{(k)} - a_{ji}^{(k)} g(x_{i_k}), & \text{falls } j \neq i_k, \\ g(x_{i_k}), & \text{falls } j = i_k, \end{cases} \qquad (k = 0, \dots, n-1).$$

Die Matrix $A^{(k+1)} = (a_{ij}^{(k+1)})_{i,j=1,\dots,N}$ ensteht aus $A^{(k)}$ durch Ersetzen der $i_k$-ten Zeile und Spalte durch den $i_k$-ten Standardbasisvektor (die Matrix $A^{(k+1)}$ ist dann symmetrisch). Die Unbekannten $\underline{u} = (u_1, \dots, u_N)$ lassen sich jetzt als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$A^{(n)} \underline{u} = b^{(n)}$$

bestimmen. Verwenden Sie hierzu das bereits implementierte cg-Verfahren.

Lassen Sie sich zur Auswertung des Programms den Fehler $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ ausgeben und berechnen Sie die numerische Konvergenzordnung. Das Ergebnis Ihrer Berechnung können Sie sich mit dem Programm `paraview` ansehen.

---

Die Übungsblätter finden Sie auf der Vorlesungshomepage unter

`http://aam.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/ubungen/theonum_pde_WS10/`