Abteilung für Angewandte Mathematik 25.10.2010
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2010/11 — Woche 2

Abgabe: Montag, den 1. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: (Young'sche Ungleichung) 4 Punkte

1. Zeigen Sie, dass für $a, b > 0$ und $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

2. Zeigen Sie, dass es für alle $a, b > 0$ und $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und für alle $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C(\varepsilon)$ gibt, so dass gilt

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon)b^q.$$

Aufgabe 2: 5 Punkte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein offenes und beschränktes Normalgebiet. Zeigen Sie, dass für alle $u \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$ und alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$2\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon}\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Definition

Sei X ein Banachraum, U eine Umgebung von $x_0 \in X$ und seien außerdem $F : U \subseteq X \to \mathbb{R}$ und $h \in X$ gegeben. Wir definieren für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ eine Abbildung $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(t) := F(x_0 + th).$$

Falls φ in $t = 0$ differenzierbar ist, d.h.

$$\varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t} \in \mathbb{R}$$

existiert, sagen wir, dass F im Punkt x_0 eine Ableitung in Richtung h besitzt, die wir mit $\delta F(x_0, h)$ bezeichnen. Falls $\delta F(x_0, h)$ für alle $h \in X$ existiert und die Abbildung

$$DF(x_0) : X \to \mathbb{R}, \quad h \mapsto \delta F(x_0, h)$$

stetig und linear ist, sagen wir, dass F im Punkt x_0 Gâteaux-differenzierbar ist und nennen $DF(x_0)$ Gâteaux-Ableitung von F im Punkt x_0.

Aufgabe 3: (Gâteaux-Ableitung) **7 Punkte**

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet und $2 \leq p < \infty$. Die Abbildung $F : L^p(\Omega, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$F(u) := \frac{1}{p} \int_\Omega |u|^p \, dx,$$

wobei $|\cdot|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass F in allen Punkten $u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ Gâteaux-differenzierbar ist mit

$$DF(u)h = \int_\Omega |u|^{p-2} \langle u, h \rangle \, dx.$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ steht für das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$.
Tipp: Differenzierbarkeit von Parameterintegralen mit sorgfältiger Begründung.

Aufgabe 3: (Fundamentallemma) **4 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein offenes Gebiet. Für $u \in C(\Omega)$ gelte

$$\int_\Omega u\eta \, dx = 0 \quad \text{für alle } \eta \in C_0^\infty(\Omega).$$

Zeigen Sie elementar, daß dann $u = 0$ auf Ω gilt.