Abteilung für Angewandte Mathematik 10.1.2011
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2010/11 — Woche 8

Abgabe: Montag, den 17. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Stokes-Problem — 6 Punkte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes, beschränktes Gebiet mit C^1-Rand.

1. Es sei $(\mathbf{u}, p) \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \times C^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung der Stokes-Gleichungen
$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \qquad && \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{in } \Omega \end{aligned} \tag{1}$$
zu gegebener rechter Seite $\mathbf{f} \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $\Delta \mathbf{u} := (\Delta u_1, ..., \Delta u_n)$ und $\operatorname{div} \mathbf{u} := \partial_1 u_1 + ... + \partial_n u_n$. Außerdem sei
$$X := \{ \mathbf{w} \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \text{ fast überall in } \Omega \}.$$
Zeigen Sie: $\mathbf{u}$ ist auch schwache Lösung von (1), das heißt $\mathbf{u} \in X$ erfüllt
$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \partial_i u_j \partial_i \varphi_j \, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega f_i \varphi_i \, dx \qquad \text{für alle } \varphi \in X. \tag{2}$$

2. Zeigen Sie, dass X ein abgeschlossener Unterraum von $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ist.

3. Zeigen Sie, dass zu jedem $\mathbf{f} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ eine eindeutige schwache Lösung $\mathbf{u} \in X$ der Stokes-Gleichungen im Sinne von (2) existiert.

Aufgabe 2: Hilbertraum-Projektion — 10 Punkte

Sei A ein nichtleerer, abgeschlossener Unterraum des Hilbertraums H und $A^\perp := \{ x \in A \mid (x, y) = 0 \; \forall y \in A \}$ das orthogonale Komplement von A.

1. Zeigen Sie, dass $A^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von H ist.

2. Wir definieren die orthogonale Projektion $P : H \to A$ durch die Bedingung $(Px, y) = (x, y) \; \forall y \in A$, das heißt $x - Px \in A^\perp$. Zeigen Sie, dass P existiert und eindeutig bestimmt ist. **Tipp:** Benutzen Sie den Riesz'schen Darstellungssatz.

3. Zeigen Sie: P ist linear und stetig und es gilt $\|P\| = 1$ falls $A \neq \{0\}$.

4. Zeigen Sie, dass es zu jedem $x \in H$ eine eindeutige Darstellung $x = y + z$ mit $y \in A$ und $z \in A^\perp$ gibt.

5. Zeigen Sie: $(A^\perp)^\perp = A$.

Aufgabe 3: L^2-Projektion — 4 Punkte

Es sei $V := \{ u \in L^2(\Omega) \mid u \text{ ist fast überall konstant} \}$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit endlichem Maß sei. Zeigen Sie mit Hilfe des Projektionssatzes, dass die L^2-Projektion auf V der Mittelwert ist, d.h.
$$\inf_{v \in V} \|u - v\|_{L^2(\Omega)} = \|u - u_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \text{ mit } u_\Omega := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u \, dx.$$