Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele 17.1.2011

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2010/11 — Woche 11

Abgabe: Montag, den 24. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Differenzenquotienten **4 Punkte**

Sei $\Delta_k^h f(x) = \frac{1}{h}(f(x+he_k) - f(x))$ und $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

1. Zeigen Sie, dass
$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_k^h f)(x) g(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\Delta_k^{-h} g)(x)\, dx.$$
2. Zeigen Sie, dass $\Delta_k^h (fg)(x) = f(x+he_k)\Delta_k^h g(x) + \Delta_k^h f(x)\, g(x)$.
3. Zeigen Sie, dass $\Delta_k^h \partial_j f = \partial_j \Delta_k^h f$ für $j, k = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 2: Norm-Formel **3 Punkte**

Sei H ein Hilbertraum mit Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie, dass $\|u\| = \sup_{\|v\|\le 1}(u, v)$.

Aufgabe 3: Inverse Abschätzung **7 Punkte**

Sei $\mathcal{T}$ eine zulässige Triangulierung eines beschränkten Gebietes $G \subset \mathbb{R}^n$ mit $\sigma(T) \le c_0$ für alle $T \in \mathcal{T}$. Sei $X_h := \{u_h \in C(\overline{G}) : u_h \in \mathbb{P}_1(T) \text{ für alle } T \in \mathcal{T}\}$ und sei $h := \min_{T\in\mathcal{T}} h_T$. Zeigen Sie die *inverse Abschätzung*
$$\|u_h\|_{H^1(G)} \le c\, h^{-1} \|u_h\|_{L^2(G)}$$
für alle $u_h \in X_h$. Zeigen Sie, dass eine analoge Abschätzung nicht für alle $u \in H^1(G)$ gelten kann.

Aufgabe 4: **6 Punkte**

Es seien die Voraussetzungen des Satzes von Lax–Milgram aus der Vorlesung erfüllt mit $f \in X^*$. Außerdem sei die Bilinearform B symmetrisch, d.h. $B(x, y) = B(y, x)$ für alle $x, y \in X$. Zeigen Sie, dass die Probleme
$$\exists u \in X \,:\, E(u) = \inf_{v\in X} E(v), \quad E(v) := \frac{1}{2}B(v, v) - f(v)$$
und
$$\exists u \in X \,:\, \forall v \in X \,:\, B(u, v) = f(v)$$
äquivalent sind. Zeigen Sie, dass diese Aussage für nicht-symmetrische Bilinearformen im Allgemeinen falsch ist.