Abteilung für Angewandte Mathematik 24.1.2010
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Einführung in Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2010/11 — Woche 12

Abgabe: Montag, den 31. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Vollständiges Orthonormalsystem 9 Punkte

Ziel der Aufgabe ist es zu zeigen, dass $V := \{(2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ein VONS (vollständiges Orthonormalsystem) von $L^2(-\pi,\pi)$ (komplexwertig) ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Zeigen Sie, dass es reicht zu zeigen, dass sich glatte Funktionen durch endliche Linearkombinationen von Funktionen aus V approximieren lassen.

b) Zeigen Sie, dass das System $W := \{(2\pi)^{-\frac{1}{2}}, \pi^{-\frac{1}{2}} \cos nx, \pi^{-\frac{1}{2}} \sin nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in $L^2(-\pi,\pi)$ bildet.

c) Zeigen Sie, dass für $C^1([-\pi,\pi])$-Funktionen f gilt: $P_n(f) \to f$ in $L^2(-\pi,\pi)$ für $n \to \infty$.

d) Folgern Sie die Vollständigkeit von V.

Aufgabe 2: schwache Konvergenz 3 Punkte

Konstruieren Sie eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(I)$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall bezeichnet, die schwach in $H^1(I)$, stark in $L^2(I)$ aber nicht stark in $H^1(I)$ konvergiert.

Aufgabe 3: Maximumprinzip 8 Punkte

Betrachten Sie die lineare, elliptische Gleichung

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u + cu = f \quad \text{in } \Omega,$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet sei und $a_{ij}, b_i, c \in C(\overline{\Omega})$, $i,j \in \{1,..,n\}$. Es gelte außerdem $a_{ij} = a_{ji}$ und es gebe eine Konstante $\lambda > 0$ mit

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\eta_i\eta_j \geq \lambda|\eta|^2, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \Omega.$$

Zeigen Sie: Falls c nichtnegativ ist und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ die Gleichung $Lu = f \leq 0$ in Ω erfüllt, so gilt für u

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u_+,$$

mit $u_+ = \max\{u, 0\}$. **Tipp:** Betrachten Sie zuerst den Fall $f < 0$ und verwenden Sie für den allgemeinen Fall die Hilfsfunktion $h(x) = e^{\alpha x_1}$.